FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS *PETROPOLITANAE.*

TOMVS XIII.

AD ANNVM MDCCXLI - XLIII.



PETROPOLI.
TYPIS ACADEMIAE.
MDCCLI.

CLASSIS PRIMA

CONTINENS

MATHEMATICA.

EXCERPTA EX LITTERIS.

à

DANIELE BERNOVLLI

ad

Leonhardum Euler.

Egregia plane ſunt, Vir Celeberrime, quae mihi de nouo fere calculi integralis genere perſcribis: placet tuus quantitates a circulo pendentes notandi modus eoque pariter iam pridem vſus ſum: recte etiam huiusmodi quantitates conſtanter reducis ad circulum eundem, cuius radium ponis aequalem vnitati, non ſecus ac quantitates logarithmicae reduci ſolent ad logarithmicam, cuius ſubtangens ſit vnitate expreſſa: Tum vero admiratus ſum inſignem vſum, quem primus obſeruaſti huiusmodi quantitatibus ineſſe, ingentem aequationum differentialium altioris gradus ſegetem ad quantitates finitas reducendi. Habent quantitates ad logarithmicam et circulum pertinentes, quum continue differentiantur, multas inſignes proprietates, quibus te vſum eſſe video, tum etiam coniicio, te methodum integrandi hic adhibere indirectam, ſed ea tamen circumſpectione, quam in eiusmodi methodis indirectis alias negligunt, vt tot nouos quantitates conſtantes arbitrarias aequatio integralis contineat, quot methodo integrandi directa ab additione conſtantium prodire potuiſſent. Circumſpectum hic vtique

eſſe oportet in diiudicandis et enumerandis diuerſis quantitatibus conſtantibus ad inſtitutum vtilibus, quia ſaepiſſime inutiles ſunt, quae non niſi poſt ſerium examen tales eſſe iudicantur. Ita verbi gratia haec formula $me^{nx} \times \text{S.A.}\overline{a+bx} + fe^{nx} \times \text{S.A.}\overline{g-bx}$ quatuor tantum arbitrariis gaudere cenſenda eſt, cum prima fronte ſex ipſi adiudicandos eſſe appareat: poteſt nempe praefata formula mutari in hanc alteram hoc confirmante $Me^{nx} \times \text{S.A}bx + Ne^{nx} \times \text{coſ. A.}bx$, vnde liquet quam facile in iſto negotio nubes pro Iunone accipi poſſit. Operae pretium foret examinare, an et quales regulae pro omni formularum genere dari poſſint in aeſtimando vero quantitatum conſtantium ad propoſitum vtilium numero, vt certi eſſe poſſimus poſt integrationes indirectas, omnes problematis ſolutiones poſſibiles fuiſſe exhibitas; huc enim huiusmodi disquiſitiones collimant: At vero propero ad calculi ſpecimina, quae mihi propoſuiſti. Obſeruaui ea non difficulter deduci ex forma quam habent differentialia ſinuum arcubus circularibus variabilibus reſpondentium, ſicut et differentialia quantitatum exponentialium ac denique quantitatum, quae oriuntur a multiplicatione vtriusque praefati generis. Sit dx conſtans intelligaturque per e numerus cuius logarithmus eſt vnitas, erit

I. $d^n . c\text{S.A.}(a+bx) = \pm cb^n dx^n \times \text{S.A.}(a+bx)$
vel $= \pm cb^n dx^n \times \text{coſ. A.}(a+bx)$

prouti n fuerit numerus vel multiplus quaternarii vel ab eodem vnitate, aut binario aut ternario deficiat.

II. $d^n . ce^{fx} = cf^n dx^n \times e^{fx}$

III. $d^n . ce^{fx} \times \text{S.A.}(a+bx) = Mcdx^n e^{fx} \times \text{S.A}(a+bx)$
$+ Ncdx^n e^{fx} \times \text{coſ.A.}(a+bx)$

vbi

vbi M et N denotant quantitates conſtantes diuerſimode compoſitas ex litteris b et f ſecundum legem obſeruatu facillimam. Poteſt itaque litteris f et b talis aſſignari valor (quod quidem fit aequatione ad tot dimenſiones aſſurgente, quot habet numerus n vnitates) vt ſit $N = 0$ et M aequalis cuicunque numero dato. Et quia aequatio plurium dimenſionum totidem habet radices diuerſas, patet ſimul totidem modis huic conditioni ſatisfieri. Quid autem faciendum ſit cum quaedam radices ſunt imaginariae vel inter ſe aequales, ex ſequentibus patebit. Haec omnia ſimpliciter deriuantur ex eo, quod $dS.A.z = dz \cos. A.z$ et $d\cos. A.z = -dz S.A.z$. Dubitare perfectis litteris tuis, Vir Clariſſime, non licet, quin haec omnia tibi ſimiliter fuerint obſeruata, iisque integrationes formularum, quas perſcripſiſti, ſuperinſtruxeris. Iam itaque haſce formulas integrandas ſuſcipio, vt videas an recte hoc argumentum fuerim aſſecutus et aliquas ſuperaddam commentationes, quas te minime improbaturum eſſe confido.

I. Exemplum primum, quod allegas, hoc eſt poſita dz conſtante.

$$nndds + s\,dz^2 = m\,dz^2\,S.A.z.$$

ad quod te argumento de aeſtu maris nuper ab Academia Regia Sc. Pariſ. Eruditis propoſito perductum fuiſſe ſcribis.

Hic facile eſt praeuidere, quod ſi ponatur $s = \alpha S.A.z$, omnes aequationis termini hanc debeant induere formam $M\,dz^2\,S.A.z$, ita vt poſſit valor litterae α aſſignari talis, vt omnes termini ſe deſtruant ſicque aequationi perfecte ſatisfiat: hunc ſcilicet in finem facienda eſt

 $\alpha =$

$\alpha = \frac{-m}{nn-1}$. Igitur aequationi differentiali propoſitae iamiam ſatisfacit aequatio $s = \frac{-m}{nn-1}$ S.A.z, quae autem nimis adhuc eſt particularis. Huic vt occurram defectui pono $s = \frac{-m}{nn-1}$ S.A.$z + q$, et ſic aequatio propoſita abit in hanc $nnddq + qdz^2 = 0$

Haec vltima quidem aequatio modo ſolito directe poteſt integrari, quia vero animus eſt vſum oſtendere integrationum indirectarum, vtor proprietatibus ſupra expoſitis, quas hic vtiliter adhiberi poſſe, ipſa aequationis huius forma indicat: pono itaque $q = f$S.A.$(bz + g)$ inquiſiturus in valorem litterae b talem, vt deſiderato ſatisfiat: docet autem calculus ponendum eſſe $b = \frac{1}{n}$. ſic igitur fit $q = f$S.A.$(\frac{z}{n} + g)$

quae omnes problematis ſolutiones poſſibiles iam continere dicenda eſt, quia tot nouis gaudet quantitatibus arbitrariis vtilibus, nempe f et g, quot ab integratione directa oriri potuiſſent. Determinato valore q, eoque ſubſtituto in aequatione aſſumta $s = \frac{-m}{nn-1}$ S.A.$z + q$, prodit aequatio finalis $s = \frac{-m}{nn-1}$ S.A.$z + f$S.A.$(\frac{z}{n} + g)$

Iſta quidem aequatio mea a tua prima fronte videtur diuerſa: reuera tamen inter ſe egregie conueniunt. Inveniſti nempe

$s = a$ S.A $\frac{z}{n} + b$ coſ. A. $\frac{z}{n} + \frac{m}{nn-1}(n$ S. A. $\frac{z}{n} -$ S. A.$z)$

atque vt identitas aequationum noſtrarum pateſiat, notabimus eſſe S. A. $(\frac{z}{n} + g) =$ coſ. A.$g \times$ S. A. $\frac{z}{n} +$ S. A.$g \times$ coſ. A. $\frac{z}{n}$. Poteſt itaque aequationi meae haec dari forma

$s = \frac{-m}{nn-1}$S.A.$z + f$coſ.A.$g \times$S.A.$\frac{z}{n} + f$S.A.$g \times$coſ.A$\frac{z}{n}$

tua

tua vero aequatio mutato terminorum ordine, haec eſt $s = \frac{-m}{nn-1}$ S. A. $z + (\frac{mn}{nn-1} + a)$ S. A. $\frac{z}{n} + b$ coſ. A. $\frac{z}{n}$ Igitur conueniet aequatio tua cum mea, ſi poſueris $a = f$ coſ. A. $g - \frac{mn}{nn-1}$ et $b = f$ S. A. g, atque vides has ſubſtitutiones hoc modo adhibitas aequationem tuam reddere haud parum concinniorem. Lubet nunc addere problematis tui ſolutionem directam, vt appareat iſto exemplo, tutiſſimum eſſe hunc integrandi modum indirectum. Sit ergo rurſus integranda aequatio

$$nndds + sdz^2 = mdz^2 \text{ S. A. } z.$$

Ponatur S. A. $z = r$, erit $dz \frac{dr}{\sqrt{(1-rr)}}$ atque (ob $dz =$ conſtanti) $dr^2 = \frac{1-rr}{r} \times - ddr$; His ſubſtitutis valoribus mutatur aequatio propoſita in hanc

$$nndds = \frac{s-m}{r} ddr$$

Ponatur, vt aequatio fiat ſimplicior, $s = \frac{-mr}{nn-1} + q$ et obtinebitur ſucceſſiue $nnrddq = qddr$ vel $nnr ddq = \frac{-qrdr^2}{1-rr}$ vel $\frac{nnddq}{q} = \frac{-dr^2}{1-rr}$ vel denique $\frac{nnddq}{q} = -dz^2$ multiplicetur haec vltima aequatio per qdq et erit $nndqddq = -qdqdz^2$, quae integrata cum additione conſtantis dat $\frac{1}{2}nndq^2 = -\frac{1}{2}qqdz^2 + \frac{1}{2}ffdz^2$ ſiue

$$dz = \frac{ndq}{\sqrt{(ff-qq)}}$$

Eſt autem $\int \frac{ndq}{\sqrt{(ff-qq)}} = n$ A. S. $\frac{q}{f}$. Sic igitur facta ſecunda integratione cum addita conſtante ng fit $z + ng = n$ A. S. $\frac{q}{f}$. Poteſt autem ſignum A. S. ſi conuertatur in partem alteram transferri, hocque facto prodit $\frac{q}{f} =$ S. A. $(\frac{z}{n} + g)$ vel $q = f$ S. A. $(\frac{z}{n} + g)$. Iam quia poſita fuit $s = \frac{-mr}{nn-1} + q$ atque $r =$ S. A. z, erit tandem

$$s = \frac{-m}{nn-1} \text{ S. A. } z + f \text{ S. A. } (\tfrac{z}{n} + g).$$

at-

atque haec aequatio eadem plane eſt cum priori, quam methodo eruimus indirecta.

Si iam ſignum termini primi mutetur in aequatione propoſita atque integranda detur

$$-nndds + sdz^2 = mdz^2 \text{ S. A. } z$$

fit ſecundus aequationis integratae terminus imaginarius, nempe talis f S.A. $\left(\frac{z}{n\sqrt{-1}} + g\right)$: dico autem poſſe in hiſce caſibus ſinui arcus circularis imaginarii ſemper ſubſtitui quantitates exponentiales, quae tunc fient reales: ſatisfaciet nempe, quod vtraque methodo liquet, nunc talis aequatio

$$s = \frac{m}{nn+1} \text{ S. A. } z + a c^{\frac{z}{n}} + b c^{\frac{-z}{n}}.$$

Caeterum poteſt aequatio propoſita infinitis modis infinities generalior reddi atque etiamnum integrari: ſed haec taceo, ne epiſtolae limites transgrediar.

II. Progredior ad exemplum alterum, quod praeſertim amo, quia pertinet ad argumentum mechanicum iam pridem a me propoſitum et a nobis ambobus ſolutum, argumentum intelligo de figura, quam lamina elaſtica vniformis muro infixa et vibrata affectat, quae figura prius definienda eſt, quam numerus vibrationum dato tempori reſpondens, de quo imprimis quaeſtio erat, determinari poſſit. Hanc autem figuram poſita abſciſſa v, applicata minima s factaque dv conſtante, conuenire inuenimus cum hac aequatione

$$d^4 s = f^4 s dv^4$$

quae quidem per ſeries concinne tractatur, ita vt numerus vibrationum abſolutus pro dato tempore inde rite definiri poſſit, ſi artificia quaedam mechanica adhibeantur. Methodus mea, quam nondum cum Academia communicare

nicare vacauit, talis eſt vt facto experimento, quantum extremitas laminae dato pondere a ſitu naturali diſtrahatur eoque pondere cum pondere laminae comparato, accurate numerus vibrationum definiatur: omnem etiam theoriam meam experimentis confirmaui. Equidem tum temporis etiam integrationem praefatae aequationis methodo directa tentaueram, ſed ea vltra differentialia ſecundi ordinis peruenire non potui. Nunc vero tibi, vir eruditiſſime, hanc obſeruationem debemus, quod iſta aequatio plane ad quantitates finitas reduci poſſit. Nec iſta reductio methodo indirecta obſcura amplius eſt, quia non aliud requiritur, quam vt inueniatur quantitas expreſſa per v et quatuor nouas conſtantes talis, vt ipſius differentialis quarti ordinis ſit ipſi quantitati quaeſitae proportionalis, cui problemati quomodo ſatisfaciendum ſit, ex praemiſſis iam luculenter patet. Videmus nempe ſtatim, poni poſſe

$$s = ae^{fv} + be^{-fv} + ce^{fv\sqrt{-1}} + ge^{-fv\sqrt{-1}}$$

Quia vero in iſta aequatione duae ſunt quantitates exponentiales imaginariae, oportet vi ſuperioris annotationis ad ſinus arcuum circularium recurrere: atque ſic inuenitur vera aequatio talis

$$s = ae^{fv} + be^{-fv} + g\,\mathrm{S.A}\,(fv + h)$$

III. Progredior ad exemplum, quod proponis, generaluis, nempe aequationem integrandam

$$d^n s = f^n s\, dv^n$$

quae concinnior paullo redditur ponendo $fv = q$: ita enim fit

$$d^n s = s\, dq^n$$

in qua aequatione dq etiamnum conſtans eſt.

 Huic

Huic quidem aequationi ſemper ſatisfacit haec aequatio $s = a e^{q}$; quia vero aequatio generaliſſima tot gaudere debet nouis arbitrariis conſtantibus quot ſunt vnitates in n, de aliis inſuper cogitandum eſt terminis aequationi propoſitae pariter ſatisfacietatibus. Huic poſtulato ſatisfieret ponendo

$$s = a e^{q} + b e^{Aq} + c e^{Bq} + f e^{Cq} + \text{etc.}$$

ſi ſcilicet per 1, A, B, C etc. intelliguntur radices huius aequationis $x^{n} = 1$, quoniam vero ſola radix prima ſemper eſt realis et reliquae omnes ſunt imaginariae (niſi n ſit numerus par, vbi etiam ſatisfacit terminus $b e^{-q}$) colligo recurrendum eſſe ad huiusmodi terminos $m e^{gq} \times \text{S.A.}(h + bq)$, in quibus litterae g et b determinantur rurſus aequationibus altioris gradus ſic vt plures diuerſi valores illis aſſignari poſſint, vnde liquet, ſi vnicus inuentus fuerit huiusmodi terminus, reliquos ſimul innoteſcere variando radices litterarum g et b. Problema itaque eo reductum eſt, vt aequationes exhibeantur, quibus praefatae litterae definiantur. Dico autem ſi veſtigiis ſupra expoſitis inſiſtatur, tales prodire aequationes

$$g^{n} - \frac{n.n-1}{1.2} g^{n-2} bb + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} g^{n-4} b^{4} - \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5}{1.2.3.4.5.6} g^{n-6} b^{6} + \text{etc.} = 1 \text{ atque}$$

$$n g^{n-1} b - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} g^{n-3} b^{3} + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5} g^{n-5} b^{5} - \text{etc.} = 0.$$

Demonſtrari autem poteſt vi harum aequationum litteram b exprimere ſinum arcus circularis qui ſe habeat ad circumferentiam circuli vt 1 ad n et litteram g eiusdem arcus exhibere coſinum: ſi itaque indicetur circumferentia circili per C, erit $b = \text{S.A}\frac{C}{n}$ atque $g = \text{coſ. A}.\frac{C}{n}$. Et cum tam ſinus quam coſinus arcuum

$\frac{C}{n}, \frac{2C}{n}, \frac{3C}{n}$ etc. eadem exprimantur aequatione, poterit ſimul poni $b = \text{S. A.} \frac{2C}{n}$; $b = \text{S. A.} \frac{3C}{n}$ etc. pariterque $g = \text{coſ. A.} \frac{2C}{n}$; $g = \text{coſ. A.} \frac{3C}{n}$. Ex hiſce omnibus ſequitur aequationem quaeſitam ita ſe habere

$$s = \alpha e^{q} + \beta e^{q\,\text{coſ. A.}\frac{C}{n}} \times \text{S. A.} (c + q\,\text{S. A.} \tfrac{C}{n}) + \gamma e^{q\,\text{coſ. A.}\frac{2C}{n}}$$
$$\times (f + q\,\text{S. A.} \tfrac{2C}{n}) + \delta e^{q\,\text{coſ. A.}\frac{3C}{n}} \times (b + q\,\text{S. A.} \tfrac{3C}{n}) + \text{etc.}$$

quae aequatio poſtquam tot ſubminiſtrauit terminos, quot requirit numerus nouarum arbitrariarum obtinendarum, ſequentes omnes in priores recurrunt, atque haec aequatio plane eadem eſt cum tua, quam mihi etſi ſine calculo et methodo, perſcripſiſti. Quoniam vero de iſto problemate ante litteras tuas perlectas non cogitaui, affirmare nunc non poſſum, me ſingula perinde fuiſſe aſſecuturum, neque abs te exigere vt credas; videbis interim ex ſequenti exemplo, cuius nequidem minima ſolutionis veſtigia appoſuiſti, via recta me nequaquam aberrare. Nec enim quicquam eorum, quae cum Patre meo hac de re communicaſſe ſcribis, mihi vllo modo in notitiam venit.

IV. Requiris aequationem integralem adaequatam huic aequationi differentiali ordinis cuiuscunque, in qua ponitur dx conſtans,

$$y + \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\beta ddy}{dx^2} + \frac{\gamma d^3y}{dx^3} + \frac{\delta d^4y}{dx^4} + \text{etc.} = 0.$$

Solutioni generali huius problematis praemittam ſolutionem aliquot caſuum particularium:

Sit *primo* $y + \frac{\alpha dy}{dx} = 0$, iam notum eſt fore $y = ae^{\frac{-x}{\alpha}}$

 Sit

Sit *ſecundo* $y + \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\beta ddy}{dx^2} = 0$; dico fore

$$y = a e^{\left(-\frac{\alpha}{2\beta} + \sqrt{(\alpha\alpha - 4\beta)}\right) x} + b e^{\left(-\frac{\alpha}{2\beta} - \sqrt{(\alpha\alpha - 4\beta)}\right) x}$$

Si vero 4β maior ſit quam $\alpha\alpha$, ponendum eſſe

$$y = a e^{\frac{-\alpha x}{2\beta}} \times \mathrm{S.A.}\left(b + \frac{x}{2\beta}\sqrt{4\beta - \alpha\alpha}\right)$$

Dico praeterea, ſi ſit $4\beta = \alpha\alpha$, fore tunc mutata paullo aequationis forma,

$$y = (a + bx) e^{\frac{-2x}{\alpha}}$$

Ponatur *tertio* $y + \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\beta ddy}{dx^2} + \frac{\gamma d^3 y}{dx^3} = 0$, poterit aequatio integralis quatuor diuerſas habere facies, eritque nominatim

$$y = a e^{fx} + b e^{gx} + c e^{hx}, \text{ aut}$$
$$y = a e^{fx} + (b + cx) e^{gx}, \text{ aut}$$
$$y = (a + bx + cxx) e^{fx}, \text{ aut denique}$$
$$y = a e^{fx} + b e^{gx} \times \mathrm{S.A}(c + hx)$$

in quibus ſingulis litterae a, b et c ſunt araitrariae conſtantes, dum litterae f, g et h aequationibus, quas calculus pro obtinenda identitate indicat, ſunt determinandae; quaenam vero ex praeſatis aequationibus ſint ſeligendae, et quonam fundamento haec omnia innitantur, apparebit nunc ex ſolutione generali.

Sit igitur iam *generaliter*

$$y + \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\beta d dy}{dx^2} + \frac{\gamma d^3 y}{dx^3} + \frac{\delta d^4 y}{dx^4} + \text{etc.} = 0$$

Ad reductionem huius aequationis obtinendam, conſideranda eſt talis aequatio

$$1 + \alpha s + \beta ss + \gamma s^3 + \delta s^4 + \text{etc.} = 0$$

Sintque radices huius aequationis, A, B, C, D etc., ita

ita vt ſit $(s-A)\times(s-B)\times(s-C)\times(s-D)\times \text{etc.}=0$;
dico fore $y=ae^{Ax}+be^{Bx}+ce^{Cx}de^{Dx}+\text{etc.}$
vbi litterae a, b, c, d etc. exprimunt quantitates arbitrarias conſtantes: Demonſtratio autem huius ſolutionis ex praemiſſis abunde patet.

Iam vero contingere poteſt vt aliquae aut etiam omnes radices A, B, C, D etc. ſint imaginariae, quibus in caſibus ſolutio eſſet imperfecta: Huic defectui ita occurretur. Sint verbi gratia C et D duae radices imaginariae (nec enim numero impares eſſe poſſunt) ſubſtituendus erit in aequatione integrali quaeſita pro terminis binis $ce^{Cx}+de^{Dx}$ talis terminus $fe^{\frac{C+D}{2}x}\times \text{S.A.}(g+\frac{C-D}{2\sqrt{-1}}x)$ qui ſemper erit realis, quoties litterae C et D inuoluunt radices quadratas alicuius quantitatis negatiuae, atque ſi plures quam duae ſint huiusmodi radices imaginariae, pro ſingulis binis ſimilis ſubſtitutio facienda eſt: Nondum tamen mihi ſatis exploratum eſt, an neceſſario alterutrum quantitatum genus problemati ſemper rite ſatisfaciat, etiamſi radices imaginariae ſint altioris gradus: Haec et multa alia, quae nunc praetereo, aliquando paullo maturius examinabo: quae enim nunc ſcribo fere tumultuaria ſunt.

Poteſt porro accidere, vt duae aut plures radices expraeſſe per A, B, C, D etc. ſint aequales, quod cum fit, coſluunt aliqui termini in aequatione exhibita $y=ae^{Ax}+be^{Bx}+ce^{Cx}+de^{Dx}+\text{etc.}$ et ſic aliquae arbitrariarum a, b, c, d etc. inutiles fiunt nec amplius aequatio iſta totam ſuam habet extenſionem. Huic nunc defectui occurretur multiplicando quantitatem exponentialem com-

munem per $a + bx + cxx +$ etc. ſumendo tot terminos quot ſunt radices aequales, idemque cum ſingulis quantitatibus exponentialibus, quae ita conflatae fuerunt ex pluribus aliis, faciendum eſt. Ita v. gr. huius aequationis $y + \frac{4dy}{dx} + \frac{4ddy}{dx^2} = 0$, debita aequatio integralis haec eſt $y = (a + bx)e^{-\frac{1}{2}x}$: atque ſi proponatur aequatio integranda $y + \frac{3dy}{dx} + \frac{3ddy}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} = 0$, dico fore

$$y = (a + bx + cxx)e^{-x}.$$

Nec plane omittendus eſt vſus huius methodi integrandi indirectae, qui in eo conſiſtit, quod ſaepe aequationes differentiales ſiue ſubſtitutionibus ſiue praeſertim vlteriori aequationis propoſitae differentiatione ad claſſes, quas expoſuimus, reduci poſſint: In illuſtrationem atque confirmationem huius rei inſeruiet ſequens exemplum. Sit aequatio integranda.

$$\text{(A)} \quad 8dx^2 + 2yddy = dy^2 + 4yydx^2$$

Haec aequatio differentiata (ponimus autem dx conſtantem) dat (B) $d^3y = 4dydx^2$

quae iam eſt ex claſſe aequationum, quarum integrationem docuimus: eſt nempe aequatio eius integralis vniverſaliſſima talis (C) $y = a + be^{2x} + ce^{-2x}$

Haec vero aequatio (C) adaequata quidem eſt aequationi (B) ſed nimiam habet extenſionem ratione aequationis propoſitae (A) quam vtpote ſecundi ordinis comprehendit ceu aequationem particulariorem: igitur nunc rurſus reſtringenda eſt aequatio hoc modo integrata (C) ex eademque caſus inutiles ſunt eliminandi: Id vero fit differentiando duabus vicibus aequationem (C) ſubſtituendoque valores y, dy et ddy ſic inuentos in aequatione propoſita

(A)

(A) tumque faciendo vt iſti aequationi recte ſatisfiat, quod hic efficitur ſumendo $c = \frac{aa-2}{4b}$: Eſt igitur vera aequatio quaeſita talis $y = a + be^{2x} + \frac{aa-2}{4b} e^{-2x}$
Atque ſimilis methodus eſt adhibenda, quoties aequatio aliqua propoſita prius fuit vlterius differentiata, quam ad ipſius aequationem integralem peruentum fuerit.

Difficile ergo non admodum eſt, vt vides, formas huiusmodi aequationum integralium aſſequi, modo quis cognitam prius habuerit legem, ſecundum quam differentialia quantitatum, quas conſiderauimus, progrediuntur. Eiusmodi quantitates alias non minus ad aequationum differentialium altioris gradus integrationem vtiles obſeruaui et nullus dubito quin praeter circulum et logarithmicam, aliae adhuc ſint curuae, in quibus variae lineae ſpeciali ſigno denotatae ſimilibus, quum differentiantur, gaudeant proprietatibus, quae nouum integrandi fontem ſuppeditare poſſint. Vide iam, Vir Celeberrime, an haec cum tuis conueniant: Ego quidem methodos noſtras nihil differre coniicio nec ea, quae noua addidi, te minus probarutum eſſe ſpero etc.

DE

DE EXTRACTIONE RADICVM EX QVANTITATIBVS IRRATIONALIBVS.

AVCTORE

LEONH. EVLERO.

§. 1.

Veteres Analyſtae ingens ſtudium impendere ſunt ſoliti in doctrinam quantitatum irrationalium ſeu ſurdarum ; atque in hoc genere potiſſimum occupati fuerant, quemadmedum ex dato binomio vel reſiduo radicem tam cubicam altiorisue gradus quam quadraticam extrahere queant. Cum enim extractio radicum ex numeris rationalibus nulla amplius difficultate laboraret, numeri irrationales eo maiorem moleſtiam pepererunt, quo minus nexus patebat inter radicem irrationalem ipſum eiusque poteſtates cuiusuis gradus. Maxima autem difficultas in hoc verſabatur, vt dignoſcere poſſent, vtrum propoſitum binomium admittat radicem pariter binomiam eius poteſtatis, quae quaeritur, an non? quod ſi enim compertum fuerit, dari eiusmodi radicem, ipſa huius radicis inuentio non amplius erit difficilis; Sin autem conſtiterit talem radicem omnino non dari, praefixione ſigni radicalis, vti in numeris rationalibus vſu venire ſolet, totum negotium abſoluetur.

§. 2. In hac disquiſitione potiſſimum conſiderari ſolent quantitates binomiae huius formae $A + B$, denotantibus litterarum A et B altera numerum rationalem alte-

tera irrationalem, ſigno radicis quadratae contentum. Duplicis vero huius formae $A \pm B$ altera $A + B$ nomen binonmii altera $A - B$ nomen reſidui obtinuit. Inter vtramque formam tam arctus intercedit nexus, vt inuenta alterius formae radice cuiusvis gradus, ex ea ſimul radix alterius formae facillime formari queat. Si enim radix cuiusque Poteſtatis ex binomio $A + B$ fuerit $x + y$, tum reſpondentis reſidui $A - B$ radix eiusdem poteſtatis erit $x - y$. Cuius nexus ratio ex formis, quas poteſtates quaecunque binomiorum ac reſiduorum induunt, facile perſpicitur.

§. 3. Vtrum huiusmodi binomium $A + B$ vel reſiduum $A - B$ admittat radicem quadratam an ſecus, diſcerni ſolet ex differentia quadratorum vtriusque partis, quae eſt $AA - BB$, quae ſi fuerit numerus quadratus, puta $= CC$, erit radix quadrata ex binomio $A + B$ $= \sqrt{\frac{A+B}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}$; reſidui autem $A - B$ radix quadrata erit $= \sqrt{\frac{A+C}{2}} - \sqrt{\frac{A-C}{2}}$. Haec ergo radicis quadratae extractio ex forma $A \pm B$ ſuccedit, ſi quantitas A, quae maior cenſetur altera quantitate B, ſimul fuerit rationalis. Namque ſi A eſſet quantitas irrationalis, tum in radice $\sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$ poſt ſigna radicalia adhuc numeri ſurdi continerentur, foretque iſta radicis expreſſio magis perplexa, quam ſi radix more ſolito hoc modo $\sqrt{(A \pm B)}$ exprimeretur.

§. 4. Regula haec pro extrahenda radice quadrata ex binomiis et reſiduis data, cum facilis eſt, tum etiam eius demonſtratio ex ſola inſpectione perſpicitur. Cum enim ſit $\sqrt{(A + B)} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}$, fiet vtrinque quadratis ſumendis $A + B = \frac{A+C}{2} + \frac{A-C}{2} + 2\sqrt{\frac{AA-CC}{4}}$ $= A + \sqrt{(AA - CC)}$. At cum ſit $CC = AA - BB$,

erit

erit $\sqrt{(AA - CC)} = B$, hincque prodit aequatio identica $A + B = A + B$. Sit exempli cauſa propoſitum ſequens binomium $54 + \sqrt{980}$ ſeu $54 + 14\sqrt{5}$, ex quo oporteat radicem quadratam extrahere. Ac primo quidem conſtat partem rationalem 54 maiorem eſſe parte irrationali $\sqrt{980}$, quod eſt primum requiſitum. Ponatur ergo $A = 54$ et $B = \sqrt{980}$, et quaeratur differentia quadratorum $AA - BB$, quae fit $= 1936$, qui numerus, cum ſit quadratus, certo indicat deſideratam radicis extractionem ſuccedere debere. Poſito ergo $1936 = CC$ fiet $C = 44$, hincque $\frac{A+C}{2} = 49$ et $\frac{A-C}{2} = 5$. Conſequenter radix quadrata ex propoſito numero $54 + \sqrt{980}$ erit $= 7 + \sqrt{5}$. Prodit hic radicis altera pars rationalis; ſaepenumero autem inuenitur radix quae ex duabus partibus irrationalibus conſtat. Quod ſi autem in radice ſigna radicalia poteſtatis quartae admittantur, in multo pluribus caſibus radices inueniri poſſunt, quibus regula hic data non commode applicari poteſt.

§. 5. Regulae igitur datae aliam ſubſtituamus, quae perpetuo, quoties quidem radix quadrata ex binomio datur, hanc radicem in forma ſimpliciſſima ſuppeditet. Sit binomium $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, ex quo radicem quadratam extrahi oporteat, in quo vel vtrumque membrum ſit rationale vel alterutrum tantum. Ex tali binomio, quod regulam praecedentem effugit, dico primo radicem extrahi poſſe ſi fuerit $a(a-b)$ quadratum; perpetuo ergo $\sqrt{a}$ nobis partem maiorem denotabit et $\sqrt{b}$ minorem. Sit igitur $a(a-b) = cc$, ac ponatur differentia $a - b = d$. His valoribus inuentis erit radix quadrata ex binomio $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ haec $= \frac{\sqrt{\frac{c+d}{2}} + \sqrt{\frac{c-d}{2}}}{\sqrt{d}}$. Sic ſi propona-

natur hoc binomium $\sqrt{12} + 3$, in quo pars irrationalis $\sqrt{12}$, maior ſit parte rationali 3, fiet $a = 12$ et $b = 9$ eritque $a - b = 3 = d$ et $a(a-b) = 36 = cc$, vnde $c = 6$; Ex his definietur radix quadrata ex binomio propoſito haec $\frac{\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt[4]{12}}$. Ex quo intelligitur, hanc regulam non ſolum praecedentem in ſe complecti, ſed etiam in innumerabilibus caſibus vtilitatem afferre, in quibus praecedens fruſtra adhibetur.

§. 6. Sit nunc binomium propoſitum hoc $4\sqrt{3} + 3\sqrt{5}$ cuius vtraque pars eſt irrationalis, ex quo radix quadrata debeat extrahi. Poſita parte maiore $4\sqrt{3} = \sqrt{a}$, et minore $3\sqrt{5} = \sqrt{b}$, fiet $a = 48$ et $b = 45$, ex quo erit $a - b = 3 = d$. Nunc igitur videndum eſt, an ſit $a(a-b)$ quadratum, quod niſi fuerit, omnis opera in radice aſſignanda fruſtra collocaretur. Fit autem $a(a-b) = 48 \cdot 3 = 144$, qui numerus quadratus ſi ponatur $= cc$, erit $c = 12$, atque $\frac{c+d}{2} = \frac{15}{2}$, et $c - d = \frac{9}{2}$. Quamobrem radix quadrata quaeſita erit $= \frac{\sqrt{\frac{15}{2}} + \sqrt{\frac{9}{2}}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt{15} + 3}{\sqrt[4]{12}}$. Hinc porro reſidui $4\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$ radix quadrata erit $= \frac{\sqrt{15} - 3}{\sqrt[4]{12}}$. Quanquam autem in his radicibus radix biquadrata $\sqrt[4]{12}$ ineſt, tamen ea merito tolerari ſolet, eo quod ea numero integro eſt praefixa, hincque facile euolui poteſt. Habet autem vtique iſta forma $\frac{\sqrt{15} + 3}{\sqrt[4]{12}}$ magnam praerogatiuam prae illa forma, quae oritur, ſi

 ſignum

ſignum radicale binomio propoſito $4\sqrt{3}+3\sqrt{5}$ ſimpliciter praefigatur; facilius enim valor expreſſionis $\frac{\sqrt{15}+3}{\sqrt[4]{12}}$ intelligitur quam huius $\sqrt{(4\sqrt{3}+3\sqrt{5})}$, ob irrationalitatem poſt ſignum radicale complicatam.

§. 7. Multo maiore difficultate laborat extractio radicis cubicae altiorisue poteſtatis ex huiusmodi binomiis; neque enim pro his certa criteria aſſignari poſſunt, ex quibus dignoſci queat, vtrum radix in tali forma binomia detur an non? Quocirca eiusmodi operatione negotium perfici conueniet, quae manuducat ad veram radicem. Si quidem talis detur; contra autem radicem falſam exhibeat. Eiusmodi igitur operatione peracta diſpiciendum erit, vtrum expreſſio reſultans ſit vera binomii propoſiti radix quaeſita, an ſecus: id quod plerumque primo intuitu ſeſe prodere ſolet. Quod ſi enim in expreſſione inuenta eiusmodi quantitates ſurdae inſint quae omnino diſcrepent, ab iis, quae in binomio propoſito continentur, id certo erit indicio radicem veram non reſultaſſe. Sin autem forma expreſſionis inuentae ita ſit comparata, vt poſſit eſſe vera radix, tum demum examen inſtitui oportebit, ad diiudicandum, vtrum ea ſit vera radix an minus. Hanc ob cauſam plus in hoc negotio praeſtari non poteſt, niſi vt regula tradatur, quae certo praebeat veram radicem, ſi talis detur in forma binomia; etiamſi eadem regula in caſu contrario perpetuo falſum exhibeat. Quae cum ab analyſeos principiis vehementer abhorreant, quippe quae in ſola veritate inveſtiganda verſantur; perſpicuum eſt, inuentionem eiusmodi regulae ex alio fonte peti debere.

§. 8.

§. 8. In eiusmodi regula inuenienda, quae tantum radici cubicae extrahendae inſeruiat, veteres multum erant occupati, neque tamen quisquam talem regulam protulit, quae certo veram radicem ſuppeditaret, ſiquidem talis detur. Newtonus vero hoc negotium penitus confeciſſe videtur in Arithmetica vniuerſali, vbi tradit regulam pro radice cuiuscunque poteſtatis ex propoſito binomio inuenienda; eamque eius indolis eſſe perhibet, vt, ſi binomium admittat radicem iſtius poteſtatis, regula illa hanc radicem certiſſime ſit patefactura. Regula haec Newtoni ita ſe habet: Sit $A \pm B$ binomium propoſitum, ex quo radicem poteſtatis, cuius exponens ſit $= c$ extrahi oporteat. Quaeratur primo minimus numerus integer n, cuius poteſtas exponentis c nempe n^c diuiſibilis ſit per $AA - BB$, quotusque qui oritur ex diuiſione poteſtatis n^c per $AA - BB$ ponatur $= Q$. Deinde quaeratur valor huic expreſſioni $\sqrt[c]{(A \pm B)\sqrt{Q}}$ proxime conueniens in numeris integris, qui ponatur $= r$. Tertio diuidatur expreſſio $A\sqrt{Q}$ per maximum diuiſorem rationalem integrum, vt ſuperſit quotus irrationalis vlterius non reducibilis, qui ponatur $= s$. Quarto definiatur numerus integer, qui proxime accedat ad valorem huius expreſſionis, $\frac{rr + n}{2rs}$ qui ſit $= t$. His praeparatis Newtonus aſſerit radicem deſideratam, ſi quidem binomium propoſitum $A \pm B$ talem admittat, fore $= \frac{ts \pm \sqrt{(ttss - n)}}{\sqrt[2c]{Q}}$: vbi notandum eſt in binomio $A \pm B$ nullas ineſſe debere fractiones; et ſi tales inſint, eas prius more ſolito tolli oportere.

§. 9. Bonitatem huius regulae, ſatis complicatae et analyſeos principiis admodum aduerſantis, pluribus exemplis pro variis radicibus allatis confirmare eſt conatus Newtonus; atque eius ope perpetuo in aſſumtis exemplis veram elicuit radicem, quod ſi ſemper vſu veniret, regula eius nulla amplius correctione egeret. Incidi autem nuper in binomium hoc $5\sqrt{5}+11$ cuius radix ſurdeſolida mihi conſtabat eſſe $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[5]{16}}$; periculum igitur mihi facere viſum eſt, an Newtoni regula hanc radicem praeberet. Erit igitur $5\sqrt{5}=A$; $11=B$; et quia radix poteſtatis quintae deſideratur, fiet $c=5$. Iam erit $AA-BB=4$; ex quo minima poteſtas quinta diuiſibilis per $AA-BB=4$ prodit $=32$, vnde fit $n=2$, et $\frac{n^c}{AA-BB}=\frac{32}{4}=8=Q$. Deinde abibit $\sqrt[c]{(A+B)\sqrt{Q}}$ in $\sqrt[5]{(5\sqrt{5}+11)\sqrt{8}}$ ſeu in $\sqrt[5]{(5\sqrt{40}+11\sqrt{8})}$, ad cuius valorem in numeris integris proximum inueniendum fit $5\sqrt{40}=31,622$, et $11\sqrt{8}=31,112$, ideoque $5\sqrt{40}+11\sqrt{8}=62,734$, cuius radix ſurdeſolida eſt $=2,288$, hincque numerus integer proxime conueniens $r=2$. Tertio fit $A\sqrt{Q}=5\sqrt{40}=10\sqrt{10}$, cuius maximus diuiſor rationalis eſt 10, et quotus $\sqrt{10}$, ex quo erit $s=\sqrt{10}$. Quarto fit $\frac{rr+n}{2rs}=\frac{6}{4\sqrt{10}}=\frac{3}{2\sqrt{10}}$, ad quam fractionem proxime accedit numerus integer $t=1$; ita vt ſit $ts=\sqrt{10}$ et $\sqrt{(ttss+n)}=\sqrt{12}$, vnde radix quaeſita, quia datur, eſſe deberet $=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{12}}{\sqrt[10]{8}}$ quae vehementer differt a vera quae eſt $=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[5]{16}}$

Hoc-

Hocque adeo caſu Newtoni regula oſtenderet binomium propoſitum $5\sqrt{5}+11$ omnino non admittere radicem ſurdeſolidam binomialem, eo quod in radice inuenta $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{12}}{\sqrt[10]{8}}$ ſeu $\frac{\sqrt{10}+2\sqrt{3}}{\sqrt[10]{8}}$ ineſt $\sqrt{3}$, quae in poteſtatem quintam neceſſario ingredi deberet.

§. 10. Regula ergo Newtoni hoc vitio, quod in iſto negotio maximum eſt, laborat, vt ſaepe numero radicem veram, et ſi talis in forma binomia datur, non exhibeat: quamobrem in aliam regulam vitio hoc carentem inquirens ſequentem inueni ex ipſa rei natura petitam, quae ſimul non ſolum perpetuo feliciori cum ſucceſſu, ſed etiam minori opera adhiberi queat. Ipſaque regula, cum modo, quo eam ſum nactus, ita ſe habet. Sit $A \pm B$ binomium ſeu reſiduum ex quo radicem poteſtatis, cuius exponens ſit $= n$ extrahere oporteat, in A vero et B nullae inſint fractiones, ita vt ſint A et B numeri integri ſiue ambo irrationales ſiue vnus duntaxat. Aliam vero irrationalitatem non ineſſe pono praeter ſimplicem ſigno radicali quadrato contentam. Ex quo vtriusque binomii $A \pm B$ partis quadratum erit numerus rationalis integer; ſcilicet AA erit numerus rationalis integer atque etiam BB; pono autem eſſe $AA > BB$.

§. 11. Quodſi iam hoc binomium vel reſiduum $A \pm B$ habeat radicem poteſtatis n binomiam, ea neceſſe eſt habeat huiusmodi formam $\frac{x \pm y}{\sqrt[2n]{p}}$. Huius enim formae poteſtas exponentis n talis erit $\frac{M \pm N}{\sqrt{p}}$, quae vtique ſi M et N ſint diuiſibiles per $\sqrt{p}$ abire poteſt in formam

mam integram A $\pm$ B. In radice ergo aſſumta $\frac{x \pm y}{\sqrt[2n]{p}}$ debebit eſſe p numerus integer rationalis, atque x et y ſiue ambo ſint numeri irrationales ſiue alteruter tantum eorum quadrata xx et yy numeros rationales fieri oportet. Quare ob affinitatem binomii cum reſiduo emergent ſtatem hae duae aequationes:

$$\sqrt[n]{(A+B)} = \frac{x+y}{\sqrt[2n]{p}}$$

$$\sqrt[n]{(A-B)} = \frac{x-y}{\sqrt[2n]{p}}$$

His duabus aequationibus in ſe mutuo ductis prodibit $\sqrt[n]{(AA-BB)} = \frac{xx-yy}{\sqrt[n]{p}}$ hincque $xx-yy = \sqrt[n]{(AA-BB)p}$. Cum igitur tam $xx-yy$ quam $AA-BB$ et p ſint numeri integri rationales, pro p talem numerum accipi oportet, vt productum $(AA-BB)p$ fiat poteſtas exponentis n. Quocirca quaeri debet eiusmodi poteſtas n puta r^n, quae ſit diuiſibilis per $AA-BB$, eaque minima, quae exhiberi queat, vt calculus ad minimos numeros redigatur. Cognoſcentur ergo numeri p et r ex aequatione $p = \frac{r^n}{AA-BB}$ quibus inuentis erit $xx-yy = r$; ideoque iam differentia quadratorum partium x et y quibus radix conſtat, innoteſcit. Atque huc vsque conuenit operatio, cum ea, quam Newtonus in ſua regula inſtituere iubet.

§. 12. Cognita differentia quadratorum radicis partium $xx-yy$, quae eſt rationalis, quaero ſummam quadratorum earumdem partium, quae pariter eſſe debet numerus rationalis integer. Fiet autem addendis quadratis binarum

binarum aequationum propoſitarum:

$$\sqrt[n]{(A+B)^2} + \sqrt[n]{(A-B)^2} = \frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{\sqrt[n]{p}}$$

hincque

$$xx+yy = \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{(A+B)^2 p} + \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{(A-B)^2 p}$$

Aequatur ergo $xx+yy$ ſummae duarum quantitatum irrationalium; vnde ſi radix exhiberi poteſt, neceſſe eſt vt ſumma binarum illarum quantitatum irrationalium fiat numerus rationalis integer. Hic itaque prodibit, ſi numeri integri quaerantur ptoxime accedentes ad valores irrationales:

$$\sqrt[n]{(A+B)^2 p} \text{ et } \sqrt[n]{(A-B)^2 p}.$$

ſumendo alterum iuſto maiorem, alterum iuſto minorem. Sit igitur proxime

$$\sqrt[n]{(A+B)^2 p} = s \pm \text{fractione}$$

$$\sqrt[n]{(A-B)^2 p} = t \mp \text{fractione}$$

hincque numeri integri s et t ope conſuetae radicum extractionionis reperientur, quibus inuentis, erit

$$xx+yy = \frac{s+t}{2}.$$

Ex hisque tandem reſultabit

$xx = \frac{2r+s+t}{4}$ et $yy = \frac{s+t-2r}{4}$, atque radix quaeſita tandem erit haec:

$$\frac{\sqrt{(2r+s+t)} + \sqrt{(s+t-2r)}}{2\sqrt[2n]{p}}$$

§. 13. Non ſolum regula haec minori opera quam Newtoniana ad calculum reuocatur. Sed etiam tutius operatur; nam cum ſecundum Newtoni regulam aliquoties valor alicuius quantitatis irrationalis proxime in numeris

 inte-

integris accipi debeat, neque preſcribatur vtrum numeri integri iuſto maiores eſſe debeant, an minores, ſaepe numero ambigere debemus, vtrum iuſto maiores numeros an iuſto minores capiamus. Noſtra autem hic data regula iſta ambiguitate caret; etſi enim bis radicis irrationalis cuiuspiam valor proximus accipi debet, tamen ſimul innuimus, alterum valorem iuſto maiorem eſſe debere alterum iuſto minorem, ita vt in binorum horum valorum ſumma nulla ambiguitas locum habere queat. Praeterea in hac operatione facili negotio inueſtigari poteſt, vtrum radix proditura vera ſit an falſa. Ad hoc ſcilicet dignoſcendum valores quantitatum $\sqrt[n]{(A+B)^2 p}$ et $\sqrt[n]{(A-B)^2 p}$ non ſolum in numeris integris, ſed etiam in fractionibus decimalibus ad aliquot figuras computentur, atque dum facile patebit, vtrum eorum valorum ſumma numerum integrum conſtituat an ſecus; quod ſi enim ſenſibiliter a numero integro aberret, hoc certum erit indicium, radicem penitus non dari, contrario autem caſu de veritate radicis inuentae certi eſſe poterimus. Perpetuo ergo noſtra regula veram radicem, ſiquidem talis datur, praebebit, et ſi non datur, facili labore id patefaciet.

§. 14. Ad vſum huius regulae monſtrandum ſumam ſuperius exemplum, cui Newtoni regula impar eſt inuenta, et queratur radix ſurdeſolida huius binomii $5\sqrt{5}+11$. Erit ergo $A=5\sqrt{5}$, $B=11$, et $n=5$. Porro eſt $AA-BB=4$, et vt valor fractionis $\frac{r^5}{4}$ fiat numerus integer, capi debet $r=2$ vnde fit $p=\frac{r^5}{4}=8$. Tertio habetur $(A+B)^2=246+110\sqrt{5}$ atque

$$(A-B)^2=246-110\sqrt{5}$$

Hinc

Hinc radicem $\sqrt{5}$ in fractionibus decimalibus exprimendo reperietur

$(A+B)^2 p = 3935,7333$
$(A-B)^2 p = \quad 0,2666$

Iam ex vtroque valore extrahatur radix ſurdeſolida, reperieturque

$$\sqrt[5]{(A+B)^2 p} = 5,23$$
$$\sqrt[5]{(A-B)^2 p} = \underline{0,76}$$
ſumma $\quad = 6 = s + t$

ſimulque videmus 6 eſſe veram ſummam, eadem autem prodiiſſet, ſi pro $\sqrt[5]{(A+B)^2 p}$ aſſumſiſſemus radicem iuſta minorem 5, et pro $\sqrt[5]{(A-B)^2 p}$ radicem iuſto maiorem 1. Litteris ergo r, s et t inuentis erit binomii propoſiti radix ſurdeſolida haec.

$$\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2\sqrt[10]{8}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}(\sqrt{5}+1)}{2^{\frac{13}{10}}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2^{\frac{4}{5}}}$$

ita vt hoc modo vera radix prodeat nempe $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[5]{16}}$

quam quidem iam a priori noueram.

§. 15. Sit vlterioris dilucidationis gratia propoſitum ſequens binomium:

$$139\sqrt{3}+91\sqrt{7}$$

ex quo oporteat extrahi radicem poteſtatis ſeptimae, fietque $n=7$, atque radix quaeſita huiusmodi habebit formam $\frac{x+y}{\sqrt[14]{p}}$.

D 2 Cum

Cum iam ſit $B = 139\sqrt{3} = \sqrt{57963}$
atque $A = 91\sqrt{7} = \sqrt{57967}$
erit $AA - BB = 4$, et $p = \frac{r^7}{4}$. Ex quo fiet $r = 2$, et $p = 32$; ideoque $xx - yy = 2$.
Porro eſt $(A+B)^2 = 115930 + 25298\sqrt{21}$
atque $(A-B)^2 = 115930 - 25298\sqrt{21}$
Hinc quantitatibus ſurdis in fractionibus decimalibus proxime exprimendis prodibit

$$(A+B)^2 p = 7419519,99760$$
$$(A-B)^2 p = 0,00240$$

ex quibus radices ſeptimae poteſtatis erunt

$$\sqrt[7]{(A+B)^2 p} = 9,58;\ s = 9$$
$$\sqrt[7]{(A-B)^2 p} = 0,42;\ t = 1.$$

Quamobrem erit $xx + yy = 5$, hincque $xx = \frac{7}{2}$ et $yy = \frac{3}{2}$, ita vt radix quaeſita futura ſit $= \frac{\sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt[14]{32}} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt[7]{64}}$
quam ex ipſa operatione iam veram eſſe radicem affirmare poſſumus, eo quod vidimus valorem $s + t$ reuera numero integro eſſe aequalem; neque tantum proxime ſed reuera fieri $s + t = 10$.

§. 16. Quamuis haec methodus latiſſime patere videatur, ita vt perpetuo felici ſucceſſu adhiberi queat, tamen vno laborat defectu, quod ea ad eiusmodi binomia, in quibus quantitates imaginariae inſunt, adcommodari nequeat. Cum enim approximatione ſit vtendum facile intelligitur, hanc operationis partem in imaginariis locum habere non poſſe. Idem hoc incommodum multo magis impedit regulam Newtonianam, in qua id tolli nullo modo poteſt; verum in noſtra methodo huic in-

incommodo medela afferri poterit. Ope approximationis ſcilicet valorem huius expreſſionis

$$\frac{\sqrt[n]{(A+B)^2 p}+\sqrt[n]{(A-B)^2 p}}{2}$$

inueſtigauimus; quare alia via erit tentanda ad hunc valorem inueniendum, ſi quantitates affuerint imaginariae in alterutra quantitatum A vel B. Ad hoc efficiendum pono $z = \sqrt[n]{(A+B)^2 p} + \sqrt[n]{(A-B)^2 p}$ atque hanc quantitatem z, cuius valor indagatur, conſidero tanquam radicem cuiusdam aequationis algebraicae, quae habebit n dimenſiones. Neque vero hancobrem determinatio quantitatis z reſolutionem aequationis n dimenſionum requirere cenſenda eſt, quia enim quaeſtio in hoc tantum verſatur, vtrum z habeat valorem in numeris integris, et ſi habet, quis ille ſit, haec inueſtigatio per regulas notas in aequatione quotcunque dimenſionum inſtitui poterit.

§. 17. Ex reſolutione aequationum altiorum graduum, quam Cel. Moiuraeus primus docuit, conſtat huius aequationis:

$$\alpha = z^n - n z^{n-2}\sqrt[n]{\beta} + n\frac{(n-3)}{1\cdot 2} z^{n-4}\sqrt[n]{\beta^2} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3} z^{n-6}\sqrt[n]{\beta^3} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} z^{n-8}\sqrt[n]{\beta^4} - \text{etc.}$$

radicem eſſe $z = \sqrt[n]{\frac{\alpha+\sqrt{(\alpha^2-4\beta)}}{2}} + \sqrt[n]{\frac{\alpha+\sqrt{(\alpha^2-4\beta)}}{2}}$. Cum iam in noſtro caſu ſit $z = \sqrt[n]{((A^2+B^2)p + 2pAB)} + \sqrt[n]{((A^2+B^2)p - 2pAB)}$ fiet $\alpha = 2p(AA+BB)$ et $\sqrt{(\alpha\alpha - 4\beta)} = 4pAB$, vnde $\beta = pp(AA-BB)^2 = r^{2n}$

 ob

ob $p(AA-BB)=r^n$. Obtinebitur ergo iſta aequatio: $z^n - nr^2 z^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2} r^4 z^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3} r^6 z^{n-6} + \text{etc.} = 2p(AA+BB)$. Ex qua ſi valor ipſius z innotuerit, erit $xx+yy=\frac{1}{2}z$, et cum ſit $xx-yy=r$ fiet $x=\frac{\sqrt{(z+2r)}}{2}$ et $y=\frac{\sqrt{(z-2r)}}{2}$; adeoque radix poteſtatis n ex binomio $A \pm B$ erit $= \frac{\sqrt{(z+2r)} \pm \sqrt{(z-2r)}}{2\sqrt[2n]{p}}$. Valores hi p et r cognoſcuntur ex aequatione $p(AA-BB)=r^n$ atque valor litterae z ex aequatione ſupra data n dimenſionum. Ad hunc autem inueniendum tantum inquiri oportet, vtrum illa aequatio habeat radicem in numeris integris, et ſi habet, ea pro valore ipſius z capiatur.

§. 18. Inſeruit hic modus non ſolum radicibus ex binomiis imaginariis inueniendis, ſed etiam commode adhiberi poteſt ad radices ex binomiis realibus inueſtigandas. Quodſi enim iſto modo vti velimus tum citra approximationem primum dignoſcere poterimus, vtrum radix detur in forma binomii, et ſi detur, quaenam ea ſit: prius ſcilicet patebit, ſi aequatio n dimenſionum habeat radicem realem, deinde ipſa radix inuenietur, ſi loco z ſcribatur illa aequationis radix. Vt ſi extrahenda ſit radix poteſtatis quintae ex binomio $5\sqrt{5}+11$, quod exemplum iam ſupra tractatum eſt fiet $n=5$ et $A=5\sqrt{5}$ et $B=11$; hincque porro $AA-BB=4$ et $AA+BB=246$. Quare cum eſſe debeat $r^5=4p$, prodibit $p=8$ et $r=2$; aequatio vero reſoluenda habebitur haec:

$$z^5 - 20z^3 + 80z = 16.\ 246.$$

Pona-

Ponatur $z = 2u$, atque aequatio orietur haec: $u^5 - 5u^3 + 5u = 123$. quae ſi habet radicem realem, ea erit vel 3 vel 41: erit ea autem $= 3$, vnde fit $z = 6$, atque radix poteſtatis quintae ex binomio erit $= \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2\sqrt[10]{8}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[5]{16}}$, omnino vt ea ſupra eſt inuenta.

§. 19. Quemadmodum hic aequatio reſoluenda ſimplicior eſt reddita poſito $z = 2u$, ita generaliter poni poteſt $z = ru$, hocque pacto aequatio illa quae incognitam z inuoluebat transmutabitur in hanc incognitam u continentem:

$$u^n - nu^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}u^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}u^{n-6} + \text{etc.} = \frac{2(AA+BB)}{AA-BB}$$

ob $r^n = p(AA - BB)$. Plerumque autem terminus vltimus abſolutus fiet numerus integer, ſi quidem extractio radicis ſuccedit. Inuento autem valore ipſius u erit binomii $A + B$ radix poteſtatis n haec $\frac{\sqrt{r(u+2)} + \sqrt{r(u+2)}}{2\sqrt[2n]{p}}$

$$= \frac{(AA-BB)^{\frac{1}{2n}}}{2}(\sqrt{(u+2)} + \sqrt{(u2)}) = \frac{\sqrt{(u+2)} + \sqrt{(u-2)}}{\sqrt[2n]{\frac{2^{2n}}{AA-BB}}}$$

Sic cum pro binomio $5\sqrt{5} + 11$, ex quo radix ſurdeſolida extrahi debet, ſit $n = 5$, $AA - BB = 4$, atque inueniatur $u = 3$, ſtatim prodibit radix quaeſita $= \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[10]{\frac{2^{10}}{4}}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[5]{16}}$. Atque ita huius regulae beneficio facillime eruatur radix cuiuscunque poteſtatis ex dato binomio; dummodo radix datur habens formam binomialem.

§. 20.

§. 20 Alterum exemplum, quod ſupra attulimus, in radice poteſtatis ſeptimae ex hoc binomio $139\sqrt{3} + 91\sqrt{7}$, verſabatur; quod ergo ſecundum regulam modo datam ita tractabitur. Erit nempe $n = 7$, $A = 91\sqrt{7}$ et $B = 139\sqrt{3}$. Hinc fiet $AA - BB = 4$, atque $AA + BB = 115930$, vnde emergit $\frac{2(AA+BB)}{AA-BB} = 57965 = 5 \cdot 11593$. Hancobrem habebitur iſta aequatio $u^7 - 7u^5 + 14u^3 - 7u = 5 \cdot 11593$ cuius radix, ſi quam habet, erit vel 5 vel 11593. Reperietur autem 5 eſſe vera radix iſtius aequationis, ex quo radix poteſtatis ſeptimae ex propoſito binomio erit $= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt[14]{\frac{2^{14}}{4}}}$ $= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt[7]{64}}$, plane vt ſupra.

§. 21. Valebit igitur pariter haec methodus ad radices extrahendas ex binomiis imaginariis, eo quod aequatio reſoluenda in §. 19 data perpetuo fit realis, propter quadrata AA et BB quantitates reales, etiamſi vel A vel B ſit quantitas imaginaria. Attamen ſaepenumero vſu veniet incommodum parui quidem momenti, quod in hoc conſiſtet, vt ambigere debeamus vtrum ſigna radicalia in radice:
$\sqrt{(u+2)}$ et $\sqrt{(u-2)}$, quae per ſe ſunt ambigua, affirmatiue an negatiue aſſumere debeamus, quae dubitatio in quantitatibus affirmatiuis facile tollitur, non autem in imaginariis. Quare his caſibus ipſa eleuatio inuentae radicis inſtitui debebit, vt pateat, quaenam ſigna cum ſingulis radicalibus ſint coniungenda. Ratio difficultatis in hoc potiſſimum eſt ſita, quod quadrata partium radicis

A et

A et B tantum in calculum ingrediantur, quae a negatiuis aeque ac affirmatiuis oriri poſſunt. Interim tamen hoc conſtat, quod ſi fuerit $\sqrt[n]{(A+B)} = \frac{\sqrt{(u+2)}+\sqrt{(u-2)}}{\sqrt[2n]{2^{2n}:(AA-BB)}}$ fore $\sqrt[n]{(A-B)} = \frac{\sqrt{(u+2)}-\sqrt{(u-2)}}{\sqrt[2n]{2^{2n}:(AA-BB)}}$ hincque $\sqrt[n]{(-A+B)} = \frac{\sqrt{(u+2)}-\sqrt{(u-2)}}{\sqrt[2n]{2^{2n}:(AA-BB)}}.\sqrt[n]{-1}$ et $\sqrt[n]{(-A-B)} = \frac{\sqrt{(u+2)}+\sqrt{(u-2)}}{\sqrt[2n]{2^{2n}:(AA-BB)}}.\sqrt[n]{-1}$ ex quibus diiudicatio dubii ſaepe facilis reddetur. Saltem ſi radix ex vna harum formarum $A+B$; $A-B$; $-A+B$; $-A-B$ fuerit inuenta, reliquarum formarum radices in promtu erunt; Dabitur tamen poſtea modus, qui hac dubitatione prorſus carebit.

§ 22. Sit nobis propoſitum hoc binonium imaginarium $+1-\sqrt{-3}$, ex quo radicem poteſtatis quintae extrahi oporteat. Erit ergo $n=5$; $A=-1$; $B=\sqrt{-3}$ hincque $AA+BB=-2$ et $AA+BB=4$; habebitur ergo haec aequatio: $u^5-5u^3+5u=-1$, ex qua prodit $u=-1$, ita vt radix quaeſita futura ſit $\frac{1+\sqrt{-3}}{\sqrt[10]{2^{10}:2^{2}}} = \frac{1+\sqrt{-3}}{\sqrt{16}}$; quae eſt vera radix. At ſi quaereretur radix poteſtatis quintae ex $+1+\sqrt{-3}$, pariter

reperiretur $\frac{\sqrt{1}+\sqrt{-3}}{\sqrt[5]{16}}$, verum hoc caſu ſignum ipſius $\sqrt{-3}$ inuerti debet, vt vera radix ſit $\frac{1-\sqrt{-3}}{\sqrt[5]{16}}$

Quamobrem erit vt ſequitur

$$\sqrt[5]{(1+\sqrt{-3})} = \frac{1-\sqrt{-3}}{\sqrt[5]{16}}$$

$$\sqrt[5]{(1-\sqrt{-3})} = \frac{1+\sqrt{-3}}{\sqrt[5]{16}}$$

$$\sqrt[5]{(-1+\sqrt{-3})} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{\sqrt[5]{16}}$$

$$\sqrt[5]{(-1-\sqrt{-3})} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{\sqrt[5]{16}}$$

ſimilitudo radicum cum ipſis poteſtatibus hoc modo magis fiet manifeſta

$$\sqrt[5]{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}} = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\,;\quad \sqrt[5]{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$\sqrt[5]{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}} = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\,;\quad \sqrt[5]{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

§. 23. Quaeratur radix poteſtatis ſeptimae ex hoc binomio imaginario $13\sqrt{3}+\sqrt{-5}$. Erit ergo $n=7$, $A=13\sqrt{3}$ et $B=\sqrt{-5}$; vnde $AA+BB=502$ atque $AA-BB=512$; ex quibus conficitur $\frac{2(AA+BB)}{AA-BB} = \frac{251}{128}$. Proueniet ergo ſequens aequatio:

$$u^7-7u^5+14u^3-7u=\frac{251}{128}$$

quae

quae ſi habet radicem rationalem erit ea vel $\pm \frac{1}{2}$ vel $\pm \frac{125}{2}$: reperitur autem radix $u = -\frac{1}{2}$, vnde radix quaeſita habetur $= \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{-\frac{5}{2}}}{\sqrt[14]{2^5}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{-5}}{\sqrt[7]{64}}$

Neque circa hanc radicem vllum dubium manere poteſt, praeter ſigna radicalium vtrum ea debeant affirmatiue capi an negatiue; inquirenti autem patebit ſigna haec inventa recte ſe habere

§. 24. Haec radicum extractio, ſi binomium propoſitum fuerit imaginarium, abſolui etiam poteſt ope multi ſectionis angulorum, quippe quae in locum aequationis illius reſoluendae ſubſtitui poteſt. Efficietur hoc autem ope ſequentium lemmatum:

I. Si fuerit $u = \text{coſ.}\ \frac{1}{n}\ \text{A ſin.}\ a$ erit

$$u = \frac{\sqrt[n]{(\sqrt{(1-aa)} + a\sqrt{-1})} + \sqrt[n]{(\sqrt{(1-aa)} - a\sqrt{-1})}}{2}$$

II. Si fuerit $v = \text{ſin.}\ \frac{1}{n}\ \text{A ſin.}\ a$ erit

$$v = \frac{\sqrt[n]{(\sqrt{(1-aa)} + a\sqrt{-1})} - \sqrt[n]{(\sqrt{(1-aa)} - a\sqrt{-1})}}{2\sqrt{-1}}$$

Ponatur iam $a\sqrt{-1} = \frac{2AB}{AA - BB}$, fiet $\sqrt{(1-aa)} = \frac{AA+BB}{AA-BB}$ Hincque ſuperiora lemmata ſequentes praebebunt aequationes

$$\text{I. coſ}\ \frac{1}{n}\ \text{A ſin}\ \frac{2AB}{(AA-BB)\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt[n]{(A+B)^2} + \sqrt[n]{(A-B)^2}}{2\sqrt[n]{(AA-BB)}}$$

$$\text{II. ſin}\ \frac{1}{n}\ \text{A ſin.}\ \frac{2AB}{(AA-BB)\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt[n]{(A+B)^2} - \sqrt[n]{(A-B)^2}}{2\sqrt{-1}.\sqrt[n]{(AA-BB)}}$$

 Quod

Quod ſi iam habeatur binomium $A \pm B$ ex quo radicem poteſtatis n extrahi oporteat, quae ſit $= \frac{x \pm y}{\sqrt[2n]{p}}$;

atque facto $p = \frac{r^n}{AA - BB}$, erit primo $xx - yy = r$. Deinde cum ſit $\frac{2(xx + yy)}{\sqrt[n]{p}} = \sqrt[n]{(A + B)^2} + \sqrt[n]{(A - B)^2}$ fiet

$xx + yy = \sqrt[n]{p(AA - BB)}$. coſ. $\frac{1}{n}$ A ſin. $\frac{2AB}{(AA - BB)\sqrt{-1}}$

ſeu $xx + yy = r$ coſ. $\frac{1}{n}$ A ſin. $\frac{2AB}{(AA - BB)\sqrt{-1}}$. Porro eſt: $\frac{4xy}{\sqrt[n]{p}} = \sqrt[n]{(A + B)^2} - \sqrt[n]{(A - B)^2}$ vnde fit $2xy = r\sqrt{}$

-1. ſin. $\frac{1}{n}$ A. ſin. $\frac{2AB}{(AA - BB)\sqrt{-1}}$. Sit arcus cuius ſinus eſt $= \frac{2AB}{(AA - BB)\sqrt{-1}}$ vel cuius coſ. $= \frac{AA + BB}{AA - BB}$; Sit inquam hic arcus $= \alpha$: fietque $x + y = \sqrt{r}$ (coſ. $\frac{\alpha}{n} + \sqrt{-1}$. ſin. $\frac{\alpha}{n}$) et $x - y = \sqrt{r}$ (coſ. $\frac{\alpha}{n} - \sqrt{-1}$. ſin. $\frac{\alpha}{n}$). Hinc porro reperietur

$$x + y = \frac{\sqrt{r(1 + \text{coſ.}\frac{\alpha}{n})} + \sqrt{r(-1 + \text{coſ.}\frac{\alpha}{n})}}{\sqrt{2}}$$

atque $\frac{x + y}{\sqrt[2n]{p}} = \frac{x + y}{\sqrt{r} : \sqrt[2n]{(AA - BB)}} =$

$\frac{\sqrt{(1 + \text{coſ.}\frac{\alpha}{n})} + \sqrt{(-1 + \text{coſ.}\frac{\alpha}{n})}}{\sqrt[2n]{\frac{2^n}{AA - BB}}}$. Ex his itaque elicitur binomii $A + B$ radix poteſtatis $n =$

$$\frac{\sqrt{(1 + \text{coſ.}\frac{\alpha}{n})} + \sqrt{-1 + \text{coſ.}\frac{\alpha}{n}}}{\sqrt[2n]{\frac{2^n}{AA - BB}}}$$

Cum autem ſit $\sqrt{(1 + \text{coſ}\frac{\alpha}{n})} = \sqrt{2}$. coſ. $\frac{\alpha}{2n}$ et $\sqrt{(-1}$
$+$ coſ.

$+ \text{coſ.} \frac{\alpha}{n}) = \sqrt{-2} . \text{ſin.} \frac{\alpha}{2n}$. Atque tandem emerget binomii A $\pm$ B radix quaeſita $= (\text{coſ.} \frac{\alpha}{2n} \pm \text{ſin.} \frac{\alpha}{2n} . \sqrt{-1}) \sqrt[2n]{(AA-BB)}$, exiſtente α arcu cuius ſinus eſt $= \frac{2AB}{(AA-BB)\sqrt{-1}}$ vel cuius coſinus eſt $= \frac{AA+BB}{AA-BB}$. Hoc tantum eſt notandum ſubinde $\sqrt[2n]{(AA-BB)}$, cuius valor vtique eſt ambiguus, negatiue accipi debere, qua de re facile erit quouis caſu iudicare. Huius igitur modi vſus erit potiſſimum quando A et B eiusmodi fuerit quantitates, vt angulus aſſignari queat, cuius coſinus $= \frac{AA+BB}{AA-BB}$.

§. 25. His expoſitis, quae ſpectant ad extractionem radicum ex propoſito binomio, pergo ad negotium multo latius patens, methodumque tradam, cuius ope non ſolum ex quantitatibus ſurdis, binomii forma contentis, ſed ex quantitatibus vtcunque irrationalibus radices dati ordinis extrahi queant. Hactenus enim tantum huiusmodi formas A + B, ex duabus partibus conſtantes ſumus contemplati atque irrationalitatem ita comparatam poſuimus, vt partium quadrata fiant numeri rationales. Nunc igitur ipſum fontem aperiemus, quo non ſolum praecedens methodus vniuerſa contineatur, ſed ex quo etiam modum haurire liceat, ex quantitate irrationali quacunque propoſita radicem dati gradus extrahendi. Quo autem vis huius methodi quam ſum expoſiturus, clarius pateat, ſequens ſpecimen eius vſum declarare poterit. Inueni ſcilicet iſtius methodi beneficio, ſequentis quantitatis tam irrationalis quam imaginariae:

$$-\frac{7}{3} + \frac{1+\sqrt{-3}}{6} \sqrt[3]{\tfrac{7}{2}(-1-3\sqrt{-3})} + \frac{1-\sqrt{-3}}{6} \sqrt[3]{\tfrac{7}{2}(-1+3\sqrt{-3})}$$

radicem quadratam eſſe hanc;

$$= \frac{\sqrt{-7}}{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{\sqrt{-7}}{4}(-1+3\sqrt{-3})^2} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{\sqrt{-7}}{4}(-1-3\sqrt{-3})^2}$$

Ex quo exemplo ſatis intelligere licet, methodum hanc non ſolum eſſe nouam, verum etiam in abbreuiandis calculis ſaepe magnam habere vtilitatem.

§. 26. Pro quantitate igitur irrationali quacunque propoſita, ex qua radicem poteſtatis n extrahi oporteat, ſcribo litteram x; eritque haec littera x radix aequationis cuiusdam algebraicae, quae ex natura quantitatis x facile aſſignabitur. Sit iſta aequatio huius formae:

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + dx^{m-4} + \text{etc.} = 0.$$

Quaeſtio ergo huc reuocatur, vt ex valore ipſius x, qui ipſi vi huius aequationis conuenit, extrahatur radix poteſtatis n. Ponatur haec radix quaeſita $= y$, erit $y = \sqrt[n]{x}$, ideoque $x = y^n$; qui valor in illa aequatione ſubſtitutus, dabit hanc aequationem:

$$y^{mn} + ay^{mn-n} + by^{mn-2n} + cy^{mn-3n} + \text{etc} = 0.$$

Quare ſi ex hac aequatione valor ipſius y aſſignari poterit, habebitur ipſa radix poteſtatis n ex quantitate propoſita x, quae quaeritur. Peruenitur quidem hoc modo ad reſolutionem aequationis multo plurium dimenſionum, quam eſt ea, per quam x definitur: verum quia in vtraque aequatione idem adeſt terminorum numerus, atque omnes ipſius y exponentes per n diuiſibiles ſunt, aequatio haec tantum m dimenſionum eſt cenſenda, ex quo ea in n aequationes ſimpliciores reſolui poterit, quarum ſingulae erunt huiusmodi

$$y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} + Cy^{m-3} + \text{etc} = 0$$

quibus aequationibus inuentis, et deinceps reſolutis ſinguli valores ipſius y praebebunt totidem radices poteſtatis n

ex

ex quantitate x. Numerus igitur harum radicum ſeu valorum ipſius y erit $= mn$, id quod egregie conuenit quaeſtionis indoli. Reuera enim x habet ex aequatione m valores diuerſos, quorum ſingulorum radices poteſtatis n hac methodo inueniri debent. Ex vnoquoque autem ipſius x valore tot radices poteſtatis n extrahi poſſunt, quot exponens n habet unitates, ex quo omnino y habere debebit mn valores diuerſos.

§. 27. Ponamus valorem ipſius x definiri per hanc aequationem quadraticam:

$$xx + ax \pm b = 0$$

ita vt ſit vel $x = -\frac{a + \sqrt{(aa - 4b)}}{2}$ vel $x = -\frac{a - \sqrt{(aa - 4b)}}{2}$; atque ex vtroque horum valorum extrahi oportere radicem poteſtatis n. Cum igitur hic ſit x binomium vel reſiduum, habemus hic illum ipſum caſum, quem hactenus tractauimus vt ſcilicet ex binomio vel reſiduo radix datae poteſtatis extrahatur. Sit igitur radix poteſtatis n ex $x = y$, ſeu $x = y^n$ atque y definietur hac aequatione:

$$y^{2n} + ay^n \pm b = 0.$$

Quodſi iam ponamus hanc aequationem in factores ſimplices duarum dimenſionum huius formae $yy \pm Ay \pm B = 0$ reſolui, quorum numerus erit $= n$, reperiemus omnes has aequationes partiales contineri in hac

$$yy \pm uy\sqrt[2n]{b} \pm \sqrt[n]{b} = 0$$

ſortiente u tot diuerſos valores, quot exponens n habet vnitates; qui valores definiuntur hac aequatione:

$$u^n - nu^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} u^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^{n-6} + \text{etc.} \pm \frac{a}{\sqrt{b}} = 0$$

vbi ſignorum ambiguorum ſuperius $+$ eſt capiendum, ſi n fuerit numerus par, contra vero alterum ſignum $-$ valet

valet, ſi ſit n numerus impar. Quare ſi huius aequationis n dimenſionum vnica radix ſeu valor ipſius u conſtiterit, ex eo bini pro y inuenientur valores hi:

$$y = -\frac{u\sqrt[2n]{b} + (uu-4)\sqrt[n]{b}}{2}$$

qui erunt radices poteſtatis n ex binis valoribus ipſius x, qui ſunt $x = -\frac{a \pm \sqrt{(aa-4b)}}{2}$ Radices autem iſtae y, etiam hoc modo poſſunt exprimi, vt ſit

$$y = -\frac{u \pm \sqrt{(uu-4)}}{2}\cdot\sqrt[2n]{b}$$

haecque regula conſentire reperietur cum ea, quae ſupra §. 19 eſt data.

§. 28. Sit nobis propoſitum hoc binomium $41\sqrt{5} - 7\sqrt{-7}$, ex quo radicem poteſtatis ſeptimae extrahi oporteat. Hoc comparato cum valore ipſius x fiet $a = -82\sqrt{5}$ et $b = 4\cdot3^7$, hincque $\frac{-a}{\sqrt{b}} = \frac{41\sqrt{5}}{\sqrt{3^7}}$. Quamobrem haec habebitur aequatio ordinis ſeptimi:

$$u^7 - 7u^5 + 14u^3 - 7u + \frac{41\sqrt{5}}{\sqrt{3^7}} = 0$$

quae ad rationalitatem reducta ponendo $u = \frac{v\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$, reperietur eſſe $v = -1$, ita vt ſit $u = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$, et $\sqrt{(uu-4)} = \frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{3}}$, atque $\sqrt[2n]{b} = \sqrt[14]{4\cdot3^7} = 2^{\frac{1}{7}}\cdot3^{\frac{1}{2}}$

Quare radix poteſtatis ſeptimae quaeſita y erit haec:

$$y = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{-7}}{2\sqrt{3}}\cdot2^{\frac{1}{7}}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{-7}}{\sqrt[7]{64}}$$

Examinanti autem patebit ſignum $+$ valere ita, vt futura ſit $\sqrt[7]{(41\sqrt{5} - 7\sqrt{-7})} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{-7}}{\sqrt[7]{64}}$.

Hocque exemplum ſufficiet ad vſum huius regulae, quae in

in ſuperioribus iam fuſius eſt expoſita, illuſtrandum. Pergo ergo ad quantitates irrationales magis compoſitas, methodumque exponam, cuius ope ex iis radices extrahi queant.

§. 29. Denotet ergo x valorem, qui ipſi ex hac aequatione cubica conuenit;

$$x^3 + a x^2 + b x + c = 0$$

et quaerenda ſit radix quadrata ex iſta quantitate x. Ponatur haec radix quadrata $= y$, ita vt ſit $y = \sqrt{x}$ ſeu $x = yy$, atque y definietur per hanc aequationem:

$$y^6 + a y^4 + b y^2 + c = 0.$$

Quodſi iam y pariter ſit radix ex aequatione aliqua cubica vti x, id quod pono: nam ſi y per aequationem cubicam exprimi nequeat, eius valor ſimplicius quam per $\sqrt{x}$ exhiberi non poterit. Quare videndum eſt, an inueniri queat aequatio cubica puta haec:

$$y^3 + p y^2 + q y + r = 0$$

quae in illa aequatione ſextae poteſtatis contineatur. Quod vt fiat, multiplicetur haec aequatio per $y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma$, ac productum illi aequationi aequetur, quo facto reperietur

$$\alpha = - p$$
$$\beta = a - q + pp$$
$$\gamma = - r + 2 p q - a p - p^3$$

Deinde vero p, q, et r determinabuntur ita.

$$b + 2 p r = a q - q q - a p p + 3 p p q - p^4$$
$$0 = (a - 2 q + pp)(r - p q)$$
$$0 = r r + c + p r (a - 2 q + pp)$$

Si iam ponamus $a - 2 q + pp = 0$ ex ſecunda aequatione fiet $r r = - c$ in tertia, atque ob $q = \frac{a + pp}{2}$

 pri-

prima dabit hanc aequationem $p^4 + 2app - 8p\sqrt{-c} + aa - 4b = 0$ ob $r = \sqrt{-c}$.
Sin autem aequatio deſideretur, per quam q determinetur, quia eſt $p = \sqrt{(2q - a)}$ aequatio prima abibit in hanc:

$$qq - b = 2\sqrt{(ac - 2cq)} \text{ ſeu}$$
$$q^4 - 2bqq + 8cq + bb - 4ac = 0$$

ex qua, ſi reperiri potuerit valor pro q erit $p = \frac{qq-b}{2r}$ atque $r = +\sqrt{-C}$. Deinde vero ſit $\alpha = -p$, $\beta = q$, et $\gamma = -r$. Inuentis ergo valoribus pro p, q, et r, aequatio ſex dimenſionum: $y^6 + ay^4 + by^2 + c = 0$ reſoluitur in binas has cubicas.

$$y^3 + py^2 + qy + r = 0$$
$$y^3 - py^2 + qy - r = 0$$

quarum radices ſingulae erunt radices quadratae ex radicibus huius aequationis $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.
Litterae autem p, q, et r a coëfficientibus cognitis a, b, et c ita pendent vt ſit $a = -pp + 2q$; $b = qq - 2pr$ et $c = -rr$ ex quibus eliminando p et r naſcitur aequatio ſuperior:

$$q^4 - 2bqq + 8cq + bb - 4ac = 0.$$

§. 30. Vt vſus huius extractionis aliquo exemplo illuſtretur, pono x habere valorem ex hac aequatione:

$$x^3 + 3xx + 6x - 25 = 0.$$

Quare, vt forma ipſius x ob oculos ponatur, radices iſtius aequationis cubicae inueſtigari oportebit; quae commodiſſime inuenientur ope ſequentis regulae in Tranſact. Anglicanis traditae.

Si

Si fuerit haec aequatio cubica.

$$\begin{array}{l} x^3 - 3\alpha xx + 3\alpha^2 - \alpha^3 \\ \qquad\quad - 3\beta x + 3\alpha\beta = 0 \\ \qquad\qquad\qquad - 2\gamma \end{array}$$

erunt eius tres radices ſequentes:

$$x = \alpha + \sqrt[3]{(\gamma + \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})} + \sqrt[3]{(\gamma - \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})}$$

$$x = \alpha - \tfrac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(\gamma + \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})} - \tfrac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(\gamma - \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})}$$

$$x = \alpha - \tfrac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(\gamma + \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})} - \tfrac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(\gamma - \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})}$$

Quod ſi nunc hanc aequationem generalem ad noſtrum exemplum $x^3 + 3x^2 + 6x - 25 = 0$ accommodemus, fiet:

$-3\alpha = 3$ ſeu $\alpha = -1$

$3 - 3\beta = 6$ ſeu $\beta = -1$

$4 - 2\gamma = -25$ ſeu $\gamma = \frac{29}{2}$

hincque $\sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)} = \frac{13\sqrt{5}}{2}$; ex quibus terni ipſius x valores erunt ſequentes:

$$x = -1 + \sqrt[3]{\tfrac{29+13\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{\tfrac{29-13\sqrt{5}}{2}}$$

$$x = -1 - \tfrac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\tfrac{29+13\sqrt{5}}{2}} - \tfrac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\tfrac{29-13\sqrt{5}}{2}}$$

$$x = -1 - \tfrac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\tfrac{29+13\sqrt{5}}{2}} - \tfrac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\tfrac{29-13\sqrt{5}}{2}}$$

Haec igitur nobis propoſita eſt quaeſtio, vt ex ſingulis hisce ipſius x valoribus radices quadratas extrahamus.

§. 31. Comparetur ergo aequatio propoſita $x^3 + 3xx + 6x - 25 = 0$ cum forma generali $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ fietque: $a = 3$, $b = 6$, et $c = -25$, atque ex his naſcetur ſequens aequatio biquadratica:

$$q^4 - 12q^2 - 200q + 336 = 0$$

ad quam eo facilius reſoluendam pono $q = 2u$ oriturque:

$$u^4 - 3u^2 - 25u + 21 = 0$$

ita vt valor ipſius u ſit vel $+3$ vel $+7$. Reperietur autem eſſe $u = 3$, ideoque $q = 6$. Porro ob $r = \sqrt{-c}$ fiet $r = 5$ atque $p = \frac{qq-b}{2r} = 3$. Quo circa radices quadratae ex valoribus ipſius x erunt radices ſequentium binarum aequationum

$$y^3 + 3y^2 + 6y + 5 = 0$$
$$y^3 - 3y^2 + 6y - 5 = 0$$

quae duae aequationes ita inter ſe conueniunt vt radices vnius ſint ſimul radices alterius ſed negatiue ſumtae: ideoque ſufficiet alterius aequationis radices indagaſſe. Ex priori ergo fit

$$-3\alpha = 3 \quad \text{ſeu} \quad \alpha = -1$$
$$3 - 3\beta = 6 \quad \text{ſeu} \quad \beta = -1$$
$$4 - 2\gamma = 5 \quad \text{ſeu} \quad \gamma = -\tfrac{1}{2}$$

hincque $\sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$; ex quibus ſequentes valores ipſius y inueniuntur

$$y = -1 + \sqrt[3]{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$
$$y = -1 - \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1-\sqrt{-5}}{2}}$$
$$y = -1 - \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1-\sqrt{-5}}{2}}.$$

Harum vnaquaeque cum ſua negatiua conſtituet radices quadratas vnius ex valoribus ipſius x.

§. 32. Ac primi quidem ipſius x valoris, qui erat

$$-1 + \sqrt[3]{\frac{20+13\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{20-13\sqrt{5}}{2}}$$

radices binae quadratae erunt:

$$-1 + \sqrt[3]{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$
$$+1 - \sqrt[3]{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}.$$

Se-

Secundi ipſius x valoris' qui erat

$$-1-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{29+13\sqrt{5}}{2}}-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{29-13\sqrt{5}}{2}}$$

radices binae quadratae erunt

$$-1-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$+1+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

Tertii denique ipſius x valoris, qui eſt

$$-1-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{20+13\sqrt{5}}{2}}-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{29-13\sqrt{6}}{2}}$$

binae radices quadratae ſunt:

$$-1-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$+1+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

quae omnia ſi cui volupe fuerit per calculum periculum facere, veritati conſentanea reperietur. Nam quaenam ex inuentis radicibus cuique ipſius x valori competant, ob ſummum nexum inter ſe, niſi periculum faciendo definiri non poteſt.

§. 33. Progrediamur vltra, atque inueſtigemus radicem cubicam ex valoribus ipſius x, quos obtinet vi aequationis huius cubicae: $x^3+ax^2+bx+c=0$. Ponatur radix cubica ex x ſeu $\sqrt[3]{x}=y$ erit $x=y^3$, atque valor radicis quaeſitae y definietur per hanc aequationem.

$$y^9+ay^6+by^3+c=0$$

Hanc igitur diuiſibilem eſſe pono per aequationem quandam cubicam:

$$y^3+py^2+qy+r=0$$

vt valor ipſius y pari expreſſione, vti x, poſſit exhiberi:

ri. Sit autem quotus huic diuiſori aſſumto reſpondens:

$$y^6 + \alpha y^5 + \beta y^4 + \gamma y^3 + \delta y^2 + \varepsilon y + \zeta = 0.$$

Quodſi iam productum aequale conſtituatur illi aequationi nouem dimenſionum, ſuperatis calculis ſatis prolixis, tandem iſtae emergent determinationes:

$$a = p^3 - 3pq + 3r$$
$$b = q^3 - 3pqr + 3rr$$
$$c = r^3$$

Vnde fit $r = \sqrt[3]{c}$; $q = \frac{p^3 + 3r - a}{3p}$

qui ipſius q valor in aequatione ſecunda ſubſtitutus dat hanc aequationem, ex qua valor ipſius p erui debebit.

$$p^9 - 3p^6(6r + a) + 3p^3(9rr + 3ar + aa - 9b) + (3r - a)^3 = 0$$

Ex hac ergo aequatione ſi erui poterit valor ipſius p, ſimul valor radicis quaeſitae y ex aequatione cubica poterit aſſignari.

§. 34. Cum igitur aequatio diuidens quaeſita ſit $y^3 + pyy + qy + r = 0$, atque inuento valore ipſius p ſit $r = \sqrt[3]{c}$ et $q = \frac{p^3 + 3r - a}{3p}$, quotus ex diuiſione ortus ſeu alter factor erit

$$y^6 - py^5 + (pp - q)y^4 - (pq - 2r)y^3 + (qq - pr)y^2 - qry + rr = 0$$

quae facile in binas ſequentes aequationes cubicas reſoluitur

$$y^3 \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} pyy \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} qy + r = 0$$
$$y^3 \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} pyy \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} qy + r = 0$$

Habemus ergo tres aequationes cubicas dummodo valor ipſius p fuerit cognitus ex quibus elicientur nouem valores pro y, quarum terni erunt totidem radices cubicae ex ſingulis ipſius x valoribus. Omnis enim quantitas

tres

tres habet radices cubicas, vti ex qualibet quantitate duae radices quadratae extrahi poſſunt. Simili ſcilicet modo, quo eſt tam $\sqrt{a^2} = a$, quam $\sqrt{a^2} = -a$ tripliciter $\sqrt[3]{a^3}$ exprimi poteſt, erit nempe

I. $\sqrt[3]{a^3} = + a$

II. $\sqrt[3]{a^3} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.\, a$

III. $\sqrt[3]{a^3} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.\, a$

atque ex hoc fonte ingreſſae ſunt iſtae coëfficientes imaginariae $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ in binas alteras aequationes inuentas.

§. 35. Potuiſſemus igitur ex hoc fonte aſſumto vno diuiſore $y^3 + py^2 + qy + r = 0$ aequationis $y^9 + ay^6 + by^3 + c = 0$ ſtatim reliquos binos diuiſores formare. Cum enim in iſta aequatione 9 dimenſionum omnes ipſius y exponentes per 3 ſint diuiſibiles, manifeſtum eſt, ſi fuerit y radix ex illa aequatione, tum etiam omnes valores in $\sqrt[3]{y^3}$ contentos eſſe debere eius radices. Hoc eſt ſi y fuerit radix illius aequationis, pariter radices erunt $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\, y$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\, y$: qui ſi loco y in aequatione $y^3 + py^2 + qy + r = 0$ ſubſtituantur, ſtatim praebent binos reliquos factores. Atque hac lege animaduerſa poterimus facile ad radices altiorum ordinum progredi, quas ex radicibus aequationis cubicae propoſitae extrahi oporteat; qui labor, ſi eodem, modo quo pro radicibus quadratis et cubicis a nobis eſt inſtitutus, ſuſciperetur, omnino fieret inſuperabilis. Quin etiam hac via procedere poterimus ad aequationes adhuc plurium dimenſionum, per quas valor ipſius x determinetur.

§. 36.

§. 36. Ex his ſcilicet, ſi debito modo applicentur, patebit, y fore radicem poteſtatis n ex x, poſito x dari per hanc aequationem cubicam:

$$x^3 + a x^2 + b x + c = 0$$

Si coëfficientes huius aequationis

$$y^3 + p y^2 + q y + r = 0$$

ſequenti modo determinentur:

I. Caſu quo $n = 1$

$$a = p$$
$$b = q$$
$$c = r$$

II. Caſu quo $n = 2$

$$a = - pp + 2 q$$
$$b = qq - 2 p r$$
$$c = - rr$$

III. Caſu quo $n = 3$

$$a = p^3 - 3 p q + 3 r$$
$$b = q^3 - 3 p q r + 3 rr$$
$$c = r^3$$

IV. Caſu quo $n = 4$

$$a = p^4 + 4 p q q - 4 p r - 2 qq$$
$$b = q^4 - 4 p q q r + 4 q rr + 2 pp rr$$
$$c = - r^4$$

V. Caſu quo $n = 5$

$$a = p^5 - 5 p^3 q + 5 pp rr + 5 p qq - 5 q r$$
$$b = q^5 - 5 p q^3 r + 5 qq rr + 5 p^2 q r^2 - 5 p r^5$$
$$c = r^5$$

VI. Caſu quo $n = 6$

$$a = - p^6 + 6 p^4 q - 6 p^3 r - 9 pp qq + 12 pqr + 2 q^3 - 3 rr$$
$$b = q^6 - 6 p q^4 r + 6 q^3 rr + 9 p^2 q^2 r^2 - 12 pqr^3 - 2 p^3 r^3 + 3 r^4$$
$$c = - r^6$$

§. 37.

§. 37. Quodſi autem quantitas x definiatur per aequationem biquadraticam:

$$x^4 + a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$$

atque y denotet radicem poteſtatis n ex x vt ſit $y = \sqrt[n]{x}$; haec radix y determinabitur pariter per aequationem biquadratam hanc:

$$y^4 + p y^3 + q y^2 + r y + s = 0$$

ſi quidem coefficientes p, q, r, et s definiantur vt ſequitur:

I. Caſu quo $n = 1$

$a = p$;
$b = q$;
$c = r$;
$d = s$;

II. Caſu quo $n = 2$

$a = -pp + 2q$
$b = qq - 2pr + 2s$
$c = -rr + 2qs$
$d = ss$

III. Caſu quo $n = 3$

$a = p^3 - 3pq + 3r$
$b = q^3 - 3pqr - 3qs + 3rr + 3pps$
$c = r^3 - 3qrs + 3pss$
$d = s^3$

IV. Caſu quo $n = 4$

$a = -p^4 + 4ppq - 4pr - 2qq + 4s$
$b = q^4 - 4pqqr - 4qqs + 4qrr + 4ppqs + 2pprr - 8prs + 6ss$
$c = -r^4 + 4qrrs - 4prss - 2qqss + 4s^3$
$d = s^4$

Atque ſimili modo vlterius tam ad altiores poteſtates radicis y, quam ad aequationes magis compoſitas, quibus x definitur progredi licet.

§. 38. Quemadmodum autem ſupra §. 34. vidimus pro extrahenda radice cubica plurimum iuuare formulas $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, quae praeter vnitatem ſunt radices cubicae ex vnitate; ita ad extractionem radicum altiorum ordinum noſſe oportebit radices earundem poteſtatum ex vnitate. Quamobrem operae praetium erit radices cuiuscunque poteſtatis, earumque indolem indagare. At manifeſtum eſt radices poteſtatis n ex vnitate oriri debere ex reſolutione huius aequationis:

$$x^n - 1 = 0$$

omnis enim valor ipſius x huic aequationi conueniens ita eſt comparatus, vt eius poteſtas exponentis n aequetur vnitati. Si iam ponamus α eſſe eiusmodi valorem ipſius x erit $\alpha^n = 1$: hinc vero ſequitur fore etiam poteſtates α^{2n}, α^{3n}, α^{4n}, etc. aequales vnitati. Quae cum ſint poteſtates exponentis n ipſarum α^2, α^3, α^4, etc. neceſſe eſt, vt, ſi fuerit α radix aequationis $x^n - 1 = 0$ ſint etiam omnes ipſius α poteſtates, quales ſunt α^2, α^3, α^4, α^5, etc. radices ipſius x. Quocirca ſi aequationis $x^n - 1 = 0$ radices ponantur α, β, γ, δ, ε, etc. hae radices ita erunt comparatae, vt vniuscuiusque poteſtates ſingulae in iisdem quantitatibus occurrere debeant. Atque hinc reſoluetur ſequens problema, quo quaeruntur n quantitates diuerſae huius naturae, vt ſingularum poteſtates quaecunque ſimul ſint termini ex ea quantitatum ſerie.

§. 39.

§. 39. Sic ſi ſit $n = 1$, aequatio $x - 1 = 0$ dat radicem 1, quae ita eſt comparata, vt eius omnes poteſtates ipſi ſint aequales, qui eſt problematis caſus primus.

Caſus ſecundus quo $n = 2$. dat hanc aequationem:

$$x^2 - 1 = 0$$

cuius duae ſunt radices hae

$$x = + 1$$
$$x = - 1$$

quarum binarum radicum omnes poteſtates ſunt vel $+ 1$ vel $- 1$.

Caſus tertius, quo $n = 3$, dat hanc aequationem: $x^3 - 1 = 0$. cuius vna radix cum ſit $= 1$, ſi aequatio $x^3 - 1 = 0$ per $x - 1$ diuidatur prodibit:

$$xx + x + 1 = 0$$

quae duas reliquas radices aequationis $x^3 - 1 = 0$ praebebit, vnde tres aequationis propoſitae $x^3 - 1 = 0$ radices erunt $x = + 1$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$
$$x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

Quae eadem proprietate commemorata gaudent, nam primae radicis 1 omnes poteſtates ipſi ſunt aequales: deinde eſt

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \qquad \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$
$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = 1 \qquad \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = 1$$
$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^4 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \qquad \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^4 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$
$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^5 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \qquad \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^5 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

et ita porro

 §. 40.

§. 40. Caſus quartus quo $n = 4$ praebet hanc aequationem: $x^4 - 1 = 0$. cuius radicum ſingularum biquadrata aequantur vnitati. Reſoluitur autem haec aequatio in has binas $xx - 1 = 0$ et $xx + 1 = 0$, ex quibus quatuor illae radices reperientur:

$$x = +1$$
$$x = -1$$
$$x = +\sqrt{-1}$$
$$x = -\sqrt{-1}$$

atque vnius cuiuscunque poteſtas quaecunque aequalis eſt vni ex his ipſis quatuor radicibus.

Caſus quintus quo $n = 5$ dat aequationem hanc $x^5 - 1 = 0$, quae diuiſa per $x - 1 = 0$, ex quo diuiſore prima radix $x = 1$ innoteſcit, dat $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$; quae in duas quadraticas diſcerpitur huius formae

$$xx + px + 1 = 0$$
$$xx + qx + 1 = 0$$

in quibus p et q ſunt radices huius aequationis $uu - u - 1 = 0$; ita vt ſit

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Hinc iam quinque radices aequationis $x^5 - 1 = 0$ oriuntur ſequentes:

$$x = 1$$
$$x = \frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4} = \alpha$$
$$x = \frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4} = \beta$$
$$x = \frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4} = \gamma$$
$$x = \frac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4} = \delta$$

quae

quae ratione ſuarum poteſtatum ita ſunt comparatae, vt ſit:

$\alpha^2 = \delta$	$\beta^2 = \gamma$	$\gamma^2 = \alpha$	$\delta^2 = \beta$
$\alpha^3 = \gamma$	$\beta^3 = \delta$	$\gamma^3 = \beta$	$\delta^3 = \alpha$
$\alpha^4 = \beta$	$\beta^4 = \alpha$	$\gamma^4 = \delta$	$\delta^4 = \gamma$
$\alpha^5 = 1$	$\beta^5 = 1$	$\gamma^5 = 1$	$\delta^5 = 1$

§. 41. Caſus ſextus quo $n = 6$ praebet hanc aequationem $x^6 - 1 = 0$, cuius ſex ſingularum radicum poteſtates ſextae aequales erunt vnitati. Haec vero aequatio per $xx - 1$ diuiſa, vnde iam duae radices ipſius x nempe $+1$ et -1 prodeunt, dat hanc

$$x^4 + x^2 + 1 = 0$$

quae vlterius reſoluitur in has duas:

$$xx + x + 1 = 0$$
$$xx - x + 1 = 0$$

vnde tandem omnes ſex radices quadratocubicae ex vnitate proueniunt:

$$x = +1$$
$$x = -1$$
$$x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$
$$x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$
$$x = \frac{+1+\sqrt{-3}}{2}$$
$$x = \frac{+1-\sqrt{-3}}{2}$$

quae ſtatim inueniri potuiſſent ex tribus radicibus cubicis vnitatis; radices enim quadratocubicae primo ſunt ipſae radices cubicae, ac deinde eaedem radices cubicae negatiue ſumtae, id quod patet ex reſolutione aequationis $x^6 - 1 = 0$ in has binas cubicas $x^3 - 1 = 0$ et $x^3 + 1 = 0$.

 §. 42.

§ 42. Roſolutio caſus ſeptimi, quo $n = 7$ et $x^7 - 1 = 0$ maiori laborat difficultate, et quia in eius reſolutione plura exempla occurrunt; quibus doctrina hactenus tradita illuſtratur, hoc negotium abſoluemus. Aequatio autem $x^7 - 1 = 0$ diuiſa per $x - 1$, vnde prima radix $x = 1$ innoteſcit, dat

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

quae diuiſores rationales non admittit, quia autem aequatio haec manet inuariata ponendo $\frac{1}{x}$ loco x, ex quo conſtat productum ex binis radicibus eſſe $= 1$ haec aequatio reſolui poterit in ternas quadraticas:

$$x + px + 1 = 0$$
$$x + qx + 1 = 0$$
$$x + rx + 1 = 0$$

vbi p, q, r ſunt tres radices ex iſta aequatione cubica

$$u^3 - u^2 - 2u + 1 = 0$$

quibus inuentis erit praeter $x = 1$

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{(pp - 4)}}{2}$$
$$x = \frac{-q \pm \sqrt{(qq - 4)}}{2}$$
$$x = \frac{-r \pm \sqrt{(rr - 4)}}{2}$$

Primo igitur valores litterarum p, q, r inueſtigari debent ex reſolutione huius aequationis cubicae: $u^3 - u^2 - 2u + 1 = 0$ cuius tres valores ipſi u conuenientes dabunt valores litterarum p, q, et r

§. 43. Comparetur ergo haec aequatio cum aequatione cubica generali §. 30 data, eritque

$\alpha = + \frac{1}{3}$;

$3\beta - \frac{1}{3} = 2$; ſeu $\beta = \frac{7}{9}$

$-\frac{1}{27}+\frac{7}{9}-2\gamma=1$ ſeu $\gamma=\frac{-7}{54}$

vnde $\sqrt{(\gamma\gamma-\beta^3)}=\frac{7}{18}\sqrt{-3}$ atque $\sqrt[3]{(\gamma\pm\sqrt{(\gamma\gamma-\beta^3)})}$ $=\sqrt[3]{(\frac{-7}{54}\pm\frac{7}{18}\sqrt{-3})}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{7}{2}(-1\pm3\sqrt{-3})}$

Hinc ergo pro p, q, r ſequentes prodibunt valores:

$$p=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{7(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2})}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{7(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2})}$$

$$q=\frac{1}{3}\;\frac{-1+\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{7(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2})}-\frac{1-\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{7(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2})}$$

$$r=\frac{1}{3}\;\frac{-1-\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{7(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{6})}-\frac{1+\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{7(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2})}$$

Tres hae formulae in hac vna comprehendi poſſunt:

$$\frac{1}{3}+\frac{\alpha}{3}\sqrt[3]{7(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2})}+\frac{\beta}{3}\sqrt[3]{7(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2})}$$

quae abit in primam ſi fuerit $\alpha=1$ et $\beta=1$, in ſecundam ſi $\alpha=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\beta=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, atque in tertiam ſi $\alpha=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ et $\beta=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. In omni autem caſu erit $\alpha\beta=1$, et $\alpha^2=\beta$, atque $\beta^2=\alpha$. Huius igitur triplicis formae in vnicam redactae quadratum quaternario minutum, vt prodeant formae $pp-4$, $qq-4$ et $rr-4$ erit:

$$-\frac{7}{9}+\frac{\alpha}{3}\cdot(\frac{1-\sqrt{-3}}{2})\sqrt[3]{7(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2})}+\frac{\beta}{3}\cdot(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{7(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2})}$$

Eſt enim $\sqrt[3]{49(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2})^2}=\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{7(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2})}$

et $\sqrt[3]{49(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2})^2}=\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{7(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2})}$

quarum transformationum beneficio quadratum ſuperius invenitur, a quo 4 ablatus eſt.

§. 44. Quia nunc inuenimus ternas quantitates $pp-4$, $qq-4$, et $rr-4$ poſſemus ſtatim iis ſignum radicale $\sqrt{}$

$\surd$ praefigendo ſeptem radices aequationis $x^7 - 1 = 0$ aſſignare. At ſi has radices in forma ſimpliciſſima exhibere velimus, indagare debemus, an ex iſtis quantitatibus $pp - 4$, $qq - 4$, $rr - 4$ actu radix quadrata extrahi poſſit. Cum igitur ſint p, q et r valores ipſius u ex hac aequatione:

$$u^3 - u^2 - 2u + 1 = 0$$

ponamus $\surd(uu - 4) = v$, atque hic valor v praebebit valores pro $\surd(pp - 4)$; $\surd(qq - 4)$ et $\surd(rr - 4)$. Poſito autem $\surd(uu - 4) = v$ ſeu $uu = vv + 4$ habebimus:

$$(vv + 2)\surd(vv + 4) = vv + 3 \text{ hincque}$$

$$v^6 + 7v^4 + 14v^2 + 7 = 0.$$

Huius aequationis ponantur ſecundum §. 29 factores

$$v^3 + pv^2 + qv + r = 0$$

$$v^3 - pv^2 + qv - r = 0$$

atque ad determinandos coefficientes p, q, r prodibit aequatio:

$$q^4 - 28q^2 + 56q = 0$$

ex qua prodit $q = 0$, $r = \surd - 7$, et $p = \surd - 7$; ita vt v definiatur per has aequationes: $v^3 \pm v^2 \surd - 7 \pm \surd - 7 = 0$

§. 45. Ex hac duplici aequatione ſufficiet alteram tantum reſoluiſſe, cum alterius radices ſint negatiuae radicum alterius aequationis, atque iam ſupra ſigna radicalia $\surd(pp-4)$; $\surd(qq-4)$; $\surd(rr-4)$ ſignum habeant ambiguum. Quaeramus ergo radices aequationis huius:

$$v^3 - v^2 \surd - 7 - \surd - 7 = 0$$

quae

quae cum forma generali §. 30. comparata, dat:

$$\alpha = \frac{\sqrt{-7}}{3}$$
$$\beta = -\frac{7}{9}$$

$$+\frac{7\sqrt{-7}}{27} - \frac{21\sqrt{-7}}{27} - 2\gamma = -\sqrt{-7} \text{ ſeu } \gamma = \frac{13\sqrt{-7}}{54}$$

vnde fit $\sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)} = \frac{\sqrt{21}}{18}$ atque

$$\sqrt[3]{(\gamma \pm \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})} = \sqrt[3]{\left(\frac{13\sqrt{-7}}{54} \pm \frac{\sqrt{27}}{18}\right)} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{13 \pm 3\sqrt{-7}}{2}}$$

ſeu $\sqrt[3]{(\gamma \pm \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})} = -\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(-\frac{1 \mp 3\sqrt{-3}}{2}\right)^2 \sqrt{-7}}$

Atque hinc ſcripto $-\sqrt{-7}$ loco $\sqrt{-7}$, prodibunt pro v tres ſequentes valores:

$$-\frac{\sqrt{-7}}{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2 \sqrt{-7}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2 \sqrt{-7}}$$

$$-\frac{\sqrt{-7}}{3} - \frac{1+\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2 \sqrt{-7}} - \frac{1-\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2 \sqrt{-7}}$$

$$-\frac{\sqrt{-7}}{3} - \frac{1-\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2 \sqrt{-7}} - \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2 \sqrt{-7}}$$

qui comprehendi poſſunt in hac vna forma:

$$-\frac{\sqrt{-7}}{3} + \frac{\mu}{3}\sqrt[3]{\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2 \sqrt{-7}} + \frac{\nu}{3}\sqrt[3]{\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2 \sqrt{-7}}$$

denotantibus μ et ν vel vtraque 1, vel altera $-\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ et altera $-\frac{1 \mp \sqrt{-3}}{2}$.

§. 46. Vt nunc appareat quomodo littera μ et ν ad ſupra aſſumtas §. 43. nempe ad α et β comparatae eſſe debeant, ſumamus huius valoris inuenti quadratum quod erit:

$$-\frac{7}{3} + \frac{\mu}{3}\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{7\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)} + \frac{\nu}{3}\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{7\left(-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

qui cum congruere debeat cum valore ſupra pro $pp-4$, ſeu $qq-4$, ſeu $rr-4$ inuento fiet

$$\alpha\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right) = \mu\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right) \text{ et}$$
$$\beta\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right) = \nu\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)$$

vnde erit $\mu = \alpha\left(-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)$

atque $\nu = \beta\left(-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)$

His definitis pro valoribus ipſius x ſupra §. 43 inuentis, ſi valeat p erit $\alpha = 1$, $\beta = 1$

ſi valeat q; erit $\alpha = -\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$; $\beta = -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$

ſi valeat r; erit $\alpha = -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$; $\beta = -\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$

Atque ex his prodibit formularum irrationalium $\sqrt{(pp-4)}$; $\sqrt{(qq-4)}$ et $\sqrt{(rr-4)}$ valor vnica expreſſione contentus hic:

$$-\frac{\sqrt{-7}}{3}+\frac{\alpha}{3}\left(-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}+\frac{\beta}{2}\left(-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{\left(-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}$$

ſubſtitutis ergo loco α et β ſingulis caſibus valoribus debitis reperientur ſequentes ſeptem radices aequationis

$$x^7 - 1 = 0$$

I. $x = 1$

II. III. $$x = -\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\sqrt[3]{7\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)}-\frac{1}{6}\sqrt[3]{7\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)}$$
$$\pm\frac{\sqrt{-7}}{6}\mp\left(-\frac{1-\sqrt{-3}}{12}\right)\sqrt[3]{\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}\pm\left(-\frac{1+\sqrt{-3}}{12}\right)\sqrt[3]{\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}$$

IV. V. $$x = -\frac{1}{6}-\left(-\frac{1+\sqrt{-3}}{12}\right)\sqrt[3]{7\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)}-\left(-\frac{1-\sqrt{-3}}{12}\right)\sqrt[3]{7\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)}$$
$$\pm\frac{\sqrt{-7}}{6}\mp\frac{1}{6}\sqrt[3]{\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}\mp\frac{1}{6}\sqrt[3]{\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}$$

VI. VII. $$x = -\frac{1}{6}-\left(-\frac{1-\sqrt{-3}}{12}\right)\sqrt[3]{7\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)}-\left(-\frac{1+\sqrt{-3}}{12}\right)\sqrt[3]{7\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)}$$
$$\pm\frac{\sqrt{-7}}{6}\mp\left(-\frac{1+\sqrt{-3}}{12}\right)\sqrt[3]{\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}\mp\left(-\frac{1-\sqrt{-3}}{12}\right)\sqrt[3]{\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}$$

§. 47. In vnaquaque harum formarum praeter primam continentur quatuor ſigna radicalia cubica, at in qualibet bina eiusmodi ſigna in vnum colligi poſſunt. Cum enim ſit vt ſupra oſtendimus:

$\sqrt{}$

$$\sqrt[3]{49}\left(-\tfrac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = -\tfrac{1-3\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{7\left(-\tfrac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

et $$\sqrt[3]{49}\left(-\tfrac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = -\tfrac{1+3\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{7\left(-\tfrac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

erit

$$\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2}\sqrt{-7} = \left(-\tfrac{1-3\sqrt{-3}}{2\sqrt{-7}}\right)\sqrt[3]{7\left(-\tfrac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

et $$\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2}\sqrt{-7} = \left(-\tfrac{1+3\sqrt{-3}}{2\sqrt{-7}}\right)\sqrt[3]{7\left(-\tfrac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

His igitur valoribus ſubſtitutis ſeptem illae ipſius x radices ex aequatione $x^7 - 1 = 0$, ſeu ſeptem diuerſae expreſſiones, quarum ſingularum poteſtates ſeptimae vnitatem producunt erunt ſequentes.

$$\text{I} = \text{I}.$$

$$\text{II et III} = -\tfrac{1\pm\sqrt{-7}}{6} - \tfrac{1}{6\sqrt{-7}}\left(\sqrt{-7}\pm(-2+\sqrt{-3})\right)\sqrt[3]{7\left(-\tfrac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)} - \tfrac{1}{6\sqrt{-7}}\left(\sqrt{-7}\pm(-2-\sqrt{-3})\right)\sqrt[3]{7\left(-\tfrac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

$$\text{IV et V} = -\tfrac{1\mp\sqrt{-7}}{6} - \tfrac{(-1+\sqrt{-3})}{12\sqrt{-7}}\left(\sqrt{-7}\pm(-2+\sqrt{-3})\right)\sqrt[3]{7\left(-\tfrac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)} - \tfrac{(-1-\sqrt{-3})}{12\sqrt{-7}}\left(\sqrt{-7}\pm(-2-\sqrt{-3})\right)\sqrt[3]{7\left(-\tfrac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

$$\text{VI et VII} = -\tfrac{1\pm\sqrt{-7}}{6} - \tfrac{(-1-\sqrt{-3})}{12\sqrt{-7}}\left(\sqrt{-7}\pm(-2+\sqrt{-3})\right)\sqrt[3]{7\left(-\tfrac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)} - \tfrac{(-1+\sqrt{-3})}{12\sqrt{-7}}\left(\sqrt{-7}\pm(-2-\sqrt{-3})\right)\sqrt[3]{7\left(-\tfrac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

§. 48. Si quis porro progredi voluerit, facile definiet octo radices huius aequationis $x^8 - 1 = 0$

$\text{I} = +1$; $\text{III} = +\sqrt{-1}$; $\text{V} = +\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$; $\text{VII} = -\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$

$\text{II} = -1$; $\text{IV} = -\sqrt{-1}$; $\text{VI} = +\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$; $\text{VIII} = -\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$:

ſimili modo ex tribus radicibus cubicis ex vnitate, reperientur nouem radices aequationis $x^9 - 1 = 0$ dum ex ſingulis radicibus cubicis denuo ternae radices cubicae

 extra-

extrahuntur eruntque ideo

$I = 1 \qquad IV = \sqrt[3]{(-\frac{1+\sqrt{-3}}{2})}; \; VII = \sqrt[3]{-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}}$

$II = -\frac{1+\sqrt{-3}}{2}; \; V = -\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}; \; VIII = -\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}}$

$III = -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}; \; VI = -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}}; \; IX = -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}}$

Decem autem radices aequationis $x^{10} - 1 = 0$ erunt primo quinque radices aequationis $x^6 - 1 = 0$ ipſae §. 40. exhibitae, atque inſuper eaedem per -1 multiplicatae. At vero radices vndecim aequationis $x^{11} - 1 = 0$ exhiberi non poſſunt niſi ope aequationis quinque dimenſionum, cuius reſolutio cum adhuc lateat, hic ſubſiſtere debemus.

PRO-

PROBLEMA ANALYTICVM.

AVCTORE

I. BERNVOLLII.

Dita ſit aequatio differentialis cuiuſuis gradus et terminorum quotcunque ex. gr. quatuor, eadem eſt enim regula pro pluribus, quae aequatio hanc habeat formam, vbi dx ponitur conſtans, $ydx + axdy + \frac{bxxddy}{dx} + \frac{cx^3d^3y}{dx^2} = 0$. Reducere hanc aequationem ad aliam vno gradu depreſſiorem.

Solutio. Multiplicetur per x^p, et fiet $yx^pdx + ax^{p+1}dy + \frac{bx^{p+2}ddy}{dx} + \frac{cx^{p+3}d^3y}{dx^2} = 0$. Termino primo adiungo terminum analogum ſecundo, ita vt ambo ſimul ſint integrabiles, deinde huic analogo ſecundo ſub ſigno contrario adiungo terminum analogum tertio, qui ambo ſimul ſumti ſint iterum integrabiles, atque ita procedo ad finem vsque, vt videre eſt ex ſequenti laterculo

$$\int\left(yx^pdx + \frac{x^{p+1}dy}{p+1}\right) = \frac{x^{p+1}y}{p+1}$$

$$\int\left(-\frac{x^{p+1}dy}{p+1} - \frac{x^{p+2}ddy}{\overline{p+1}\cdot\overline{p+2}\cdot dx}\right) = -\frac{x^{p+2}dy}{\overline{p+1}\cdot\overline{p+2}\cdot dx}$$

$$\int\left(\frac{x^{p+2}ddy}{\overline{p+1}\cdot\overline{p+2}\cdot dx} + \frac{x^{p+3}d^3y}{\overline{p+1}\cdot\overline{p+2}\cdot\overline{p+3}\cdot dx^2}\right) = \frac{x^{p+3}ddy}{\overline{p+1}\cdot\overline{p+2}\cdot\overline{p+3}\cdot dx^2}$$

Nunc multiplico ſecundam et tertiam aequationem per coëfficientes conſtantes e et f, quorum valores vt et valor exponentis aſſumti p poſtea quaerendi ſunt, quo facto laterculus erit vt ſequitur:

$$\int\left(yx^p dx + \frac{x^{p+1}dy}{p+1}\right) = \frac{x^{p+1}y}{p+1}$$
$$e\int\left(-\frac{x^{p+1}dy}{p+1} - \frac{x^{p+2}ddy}{p+1\cdot p+2\cdot dx}\right) = -\frac{ex^{p+2}dy}{p+1\cdot p+2\cdot dx}$$
$$f\int\left(\frac{x^{p+2}ddy}{p+1\cdot p+2\cdot dx} + \frac{x^{p+3}d^3y}{p+1\cdot p+2\cdot p+3\cdot dx^2}\right) = \frac{fx^{p+3}ddy}{p+1\cdot p+2\cdot p+3\cdot dx}.$$

Colligendo terminos analogos, naſcetur aequatio ſequens, $\int\left(yx^p dx + \frac{(1-e).x^{p+1}dy}{p+1} + \frac{(f-e)\,x^{p+2}ddy}{p+1\cdot p+2\cdot dx} + \frac{fx^{p+3}d^3y}{p+1\cdot p+2\cdot p+3\cdot dx^2}\right) = \frac{x^{p+1}y}{p+1} + \frac{-ex^{p+2}dy}{p+1\cdot p+2\cdot dx} + \frac{fx^{p+3}ddy}{p+1\cdot p+2\cdot p+3\cdot dx^2}$ $\pm$ A. Nota, quod A ſit conſtans arbitraria, quae poſt integrationes peractas addi vel ſubtrahi ſolet.

Porro vt membrum prius identificetur cum differentiali propoſito ſeu cum eius aequiualente $yx^p dx + ax^{p+1}dy + \frac{bx^{p+2}ddy}{dx} + \frac{cx^{p+3}d^3y}{dx^2}$, oportet coaequare coefficientes terminorum homogeneorum, nempe $a = \frac{1-e}{p+1}$, $b = \frac{f-e}{p+1\cdot p+2}$, $c = \frac{f}{p+1\cdot p+2\cdot p+3}$, vnde lucrabimur $e = (p+1\,.\,p+2\,.\,p+3)\,c - (p+1\,.\,p+2)\,b$, et $f = (p+1\,.\,p+2\,.\,p+3)\,c$, ipſius vero p valor eſt radix huius aequationis $1-(p+1)a+(p+1\,.\,p+2)b-(p+1\,.\,p+2\,.\,p+3)c = 0$, quae erit trium dimenſionum.

His igitur valoribus ſubſtitutis in altero membro, orietur quaeſita aequatio differentialis reducta vno gradu ſimplicior quam propoſita, quae ſcilicet haec erit:
$$\frac{x^{p+1}y}{p+1} + [b-(p+3)c]\frac{x^{p+2}dy}{dx} + \frac{cx^{p+3}ddy}{dx^2} \pm A = 0$$

Reiecta arbitraria A, et tum diuidendo per x^{p+1}, prodibit aequatio minus quidem vniuerſalis ſed multo ſimplicior, $\frac{y}{p+1} + [b-(p+3)c]\frac{xdy}{dx} + \frac{cxxddy}{dx^2} = 0$.

Cae-

Caeterum vero, ſeruata licet arbitraria A, iam videmus formam quam induit aequatio reducta ex differentiali tertii gradus ad differentialem gradus ſecundi; quae forma vtique ſimilis eſt illi quam habet ipſa reducenda, ratione ſcilicet progreſſionis tam dimenſionum ipſius x, quam graduum differentialium ipſius dy: Vnde ſtatim concludere licebit, ſi iam vlterius reducatur, per hanc methodum, aequatio reducta differentialis ſecundi gradus, ad aliam primi gradus, quod habitura ſit talem formam $\alpha x^q y + \frac{\mathfrak{C} x^{q+1} dy}{dx} \pm A x^r \pm B = 0$. Quae ipſa poſt inſtitutam reductionem tertiam, quae heic eſt finalis, abibit tandem in aequationem finitam ſine differentialibus, huius formae $m x^n y \pm A x^s \pm B x^t \pm C = 0$. Vbi cum A, B, C, ſint aſſumtae arbitrariae, poſſunt illae omnino negligi, retenta ſola C, ita vt pro aequatione quaeſita ſit tantum $m x^n y \pm C = 0$, per conſequens ſatisfaciat curua ex genere vel Hyperbolarum vel Parabolarum, prout exponens n eſt vel affirmatiuus vel negatiuus.

OBSERVATIONES ANALYTICAE VARIAE DE COMBINATIONIBVS

Auctore
L. Euler.

§. 1.

Propoſita nobis ſit ſeries quantitatum quarumcunque ſiue finita ſiue in infinitum excurrens haec:

$$a, b, c, d, e, f, g, h, \text{etc.}$$

quae litterae denotent quantitates quascunque ſiue inter ſe aequales ſiue inaequales. Interim tamen quantitates, quae diuerſis litteris indicantur, inter ſe inaequales vocabo, etiamſi in exemplis earum loco numeros aequales ſubſtituere liceat.

§. 2. Nunc primo ex his quantitatibus formentur poteſtatibus ſumendis nouae ſeries, quarum ſummae deſignentur litteris maiuſculis A, B, C, D etc. vt ſequitur: ſit ſcilicet

$$A = a + b + c + d + e + \text{etc.}$$
$$B = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \text{etc.}$$
$$C = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + \text{etc.}$$
$$D = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 + \text{etc.}$$
$$E = a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

quae ſeries ſingulae erunt infinitae, ſi numerus quantitatum a, b, c, d, etc. aſſumtarum fuerit infinitus; ſin autem numerus harum quantitatum ſit finitus ac determinatus

natus puta $= n$, tum ſingulae iſtae ſeries totidem terminos complectentur.

§. 3. Deinde ſequenti modo ex quantitatibus aſſumtis a, b, c, d, etc. productis inaequalium ſumendis formentur ſeries. Primo ſcilicet colligantur quantitates ſingulae, tum facta ex binis inaequalibus; tertio ex ternis inaequalibus; quarto ex quaternis inaequalibus et ita porro; atque hae ſeries litteris graecis α, β, γ, δ, etc. indicentur vt ſequitur.

$$\alpha = a + b + c + d + \text{etc.}$$
$$\beta = ab + ac + ad + ae + bd + \text{etc.}$$
$$\gamma = abc + abd + abe + bcd + \text{etc.}$$
$$\delta = abcd + abce + bcde + \text{etc.}$$
$$\varepsilon = abcde + \text{etc.}$$
etc.

quae ſeries ſi quantitatum aſſumtarum a, b, c, d, etc. numerus fuerit infinitus, non ſolum omnes in infinitum excurrent, ſed etiam ipſarum ſerierum hoc modo formandarum numerus erit infinitus. Quodſi autem numerus quantitatum a, b, c, d, etc. fuerit finitus puta $= n$, tum ſeries α continebit n terminos, ſecunda ſeries β conſtabit ex $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ terminis, tertia γ ex $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ terminis, quarta δ ex $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ terminis, et ita porro, donec tandem ad ſeriem perueniatur ex vnico termino conſtantem, quam ſequentes omnes euaneſcent terminis omnino carentes. Perſpicuum autem eſt ſerierum, quae hoc modo generantur, numerum fore $= n$, earumque vltimam vnico conſtare termino, qui ſit pro-

ductum ex omnibus quantitatibus aſſumtis a, b, c, d, e, etc.

§. 4. Quemadmodum autem hic producta ex quantitatibus inaequalibus tantum aſſumſimus, ex iisque ſeries expoſitas formauimus; ita iisdem quantitatibus in productis quoties fieri poterit repetendis, nanciſcemur nouas productorum ex ſingulis, binis, ternis, quaternis, etc. ſeries, in quibus factores aequales non, vt ante excludantur; hae ergo ſeries ita ſe habebunt.

$$\mathfrak{A} = a + b + c + d + e + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{B} = a^2 + ab + b^2 + ac + bc + c^2 + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{C} = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 + a^2c + abc + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{D} = a^4 + a^3b + a^2b^2 + a^2bc + abcd + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{E} = a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^3bc + a^2bcd + \text{etc.}$$
etc.

in his nempe ſeriebus omnes continentur quantitates, quae per multiplicationem ex quantitatibus aſſumtis a, b, c, d, etc. produci poſſunt. Ceterum notandum eſt ſi numerus quantitatum a, b, c, d, etc. fuerit finitus $= n$, tum ſeriem primam $\mathfrak{A}$ eſſe habituram n terminos, ſecunda autem $\mathfrak{B}$ habebit $\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}$ terminos, tertia $\mathfrak{C}$ habebit $\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ terminos, quarta $\mathfrak{D}$ vero $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ terminos, et ita porro.

§. 5. Tres hi ſerierum, quas ex quantitatibus aſſumtis a, b, c, d, etc. triplici modo compoſuimus, ordines multifariam inter ſe connectuntur, ita vt vno ſerierum ordine cognito, bini reliqui ordines inde poſſint determinari. Atque in hoc negotio ad connexionis legem et rationem inueſtigandam obſeruatio atque inductio plu

plurimum adhiberi ſolet; hocque pacto primum quidem certiſſime conſtat eſſe $A - \alpha = \mathfrak{A}$; ac de reliquis compertum eſt eſſe:

$$\alpha = A$$
$$\beta = \frac{\alpha A - B}{2}$$
$$\gamma = \frac{\beta A - \alpha B + C}{3}$$
$$\delta = \frac{\gamma A - \beta B + \alpha C - D}{4}$$
$$\varepsilon = \frac{\delta A - \gamma B + \beta C - \alpha D + E}{5}$$

etc. item

$$\mathfrak{A} = A$$
$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A} A + B}{2}$$
$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B} A + \mathfrak{A} B + C}{3}$$
$$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{C} A + \mathfrak{B} B + \mathfrak{A} C + D}{4}$$
$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{D} A + \mathfrak{C} B + \mathfrak{B} C + \mathfrak{A} D + E}{5}$$

etc.

praetereaque

$$\mathfrak{A} = \alpha$$
$$\mathfrak{B} = \alpha \mathfrak{A} - \beta$$
$$\mathfrak{C} = \alpha \mathfrak{B} - \beta \mathfrak{A} + \gamma$$
$$\mathfrak{D} = \alpha \mathfrak{C} - \beta \mathfrak{B} + \gamma \mathfrak{A} - \delta$$
$$\mathfrak{E} = \alpha \mathfrak{D} - \beta \mathfrak{C} + \gamma \mathfrak{B} - \delta \mathfrak{A} + \varepsilon$$

etc.

Harumque relationum ope ex datis ſummis ſerierum cuiuscunque claſſis definiri poterunt ſummae ſerierum, quae in duabus reliquis claſſibus continentur.

 §. 6.

§ 6. Ad naturam atque indolem harum ſerierum diligentius attendenti facile quidem per obſeruationem et inductionem veritas iſtius mutuae relationis patebit. Verum tamen quo magis de veritate huius nexus conuincamur, expediet ſequenti modo totum hoc negotium conſiderare; quo ſimul aliae inſuper proprietates nobis offerentur, ad quas ſola inductio non tam facile viam aperit. Aſſumtis ſcilicet pro libitu quantitatibus

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ \text{etc.}$$

ex iisque formatis trium claſſium ſeriebus ſupra memoratis, contemplemur hanc expreſſionem:

$$P = \frac{az}{1-az} + \frac{bz}{1-bz} + \frac{cz}{1-cz} + \frac{dz}{1-dz} + \frac{ez}{1-ez} + \text{etc.}$$

cuius ſinguli termini in progreſſiones geometricas reſoluti more ſolito, dabunt

$$\begin{aligned} P = & + z\,(a + b + c + d + e + \text{etc.}) \\ & + z^2\,(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \text{etc.}) \\ & + z^3\,(a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + \text{etc.}) \\ & + z^4\,(a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 + \text{etc.}) \end{aligned}$$

quae ſeries omnes in prima claſſe continentur. Quare ſi earum loco ſummae ſupra (2) poſitae ſcribantur fiet:

$$P = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{etc.}$$

cuius idcirco ſeriei ſumma erit, vti ſumſimus

$$P = \frac{az}{1-az} + \frac{bz}{1-bz} + \frac{cz}{1-cz} + \frac{dz}{1-dz} + \text{etc.}$$

Simili autem modo ſi fuerit:

$$Q = \frac{az}{1+az} + \frac{bz}{1+bz} + \frac{cz}{1+cz} + \frac{dz}{1+dz} + \text{etc.}$$

erit per ſeries primae claſſis:

$$Q = Az - Bz^2 + Cz^3 - Dz^4 + Ez^5 - \text{etc.}$$

§. 7.

§. 7. Conſideremus porro hanc expreſſionem:
$R = (1 + az)(1 + bz)(1 + cz)(1 + dz)(1 + ez)$ etc. cuius factores, ſi actu in ſe multiplicentur; ac termini ſecundum exponentes ipſius z diſponantur fiet coëfficiens ipſius z aequalis ſummae quantitatum aſſumtarum a, b, c, d, etc. Coëfficiens ipſius z^2 erit aggregatum omnium productorum ex binis inaequalibus; coëfficiens ipſius z^3 erit aggregatum omnium productorum ex ternis inaequalibus et ita porro: ex quibus ſequitur fore

$$R = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \varepsilon z^5 + \text{etc.}$$

ſecundum definitiones ſupra (§. 3) datas.
Quodſi autem ponatur:

$$S(1 - az)(1 - bz)(1 - cz)(1 - dz)(1 - ez) \text{ etc.}$$

erit faciendo tantum z negatiuo

$$S = 1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4 - \varepsilon z^5 + \text{etc.}$$

§. 8. Vt ſeries hae R et S cum praecedentibus P et Q comparentur, notandum eſt eſſe
$lR = l(1 + az) + l(1 + bz) + l(1 + cz) + l(1 + dz) + \text{etc.}$
vnde ſumendis differentialibus erit:

$$\frac{dR}{Rdz} = \frac{a}{1 + az} + \frac{b}{1 + bz} + \frac{c}{1 + cz} + \frac{d}{1 + dz} + \text{etc.}$$

quae per z multiplicata dat illam ipſam expreſſionem quam ſupra Q vocauimus, ita vt ſit: $Q = \frac{zdR}{Rdz}$. Simili autem modo erit $\frac{dS}{Sdz} = \frac{-a}{1 - az} - \frac{b}{1 - bz} - \frac{c}{1 - cz} - \text{etc.}$ vnde habebitur $P = \frac{-zdS}{Sdz}$.

§. 9. Cum nunc ſit $R = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \text{etc.}$ erit $\frac{zdR}{dz} = \alpha z + 2\beta z^2 + 3\gamma z^3 + 4\delta z^4 + 5\varepsilon z^5 + \text{etc.}$ ideoque $Q = Az - Bz^2 + Cz^3 - Dz^4 + Ez^5 - \text{etc.}$

$$= \frac{\alpha z + 2\beta z^2 + 3\gamma z^3 + 4\delta z^4 + 5\varepsilon z^5 + \text{etc.}}{1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \varepsilon z^5 + \text{etc.}}$$

At ex aequalitate harum expreſſionum ſequuntur ſequentes relationes inter litteras A, B, C, D, E, etc. et α, β, γ, δ, ε, etc.

$$A = \alpha$$
$$\alpha A - B = 2\beta$$
$$\beta A - \alpha B + C = 3\gamma$$
$$\gamma A - \beta B + \alpha C - D = 4\delta$$
$$\delta A - \gamma B + \beta C - \alpha D + E = 5\varepsilon$$
etc.

Simili vero modo ex altera aequatione $P = \frac{-z\,dS}{S\,dz}$ ſequitur $P = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{etc.}$

$$= \frac{\alpha z - 2\beta z^2 + 3\gamma z^3 - 4\delta z^4 + 5\varepsilon z^5 - \text{etc.}}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4 - \varepsilon z^5 + \text{etc.}}$$

quae pariter easdem praebet determinationes, quas ſupra §. 5. tradidimus.

§. 10. Praeterea autem ex aequatione $Q = \frac{z\,dR}{R\,dz}$ conſequimur integrando $\int \frac{Q\,dz}{z} = lR$. Quoniam vero eſt $Q = Az - Bz^2 + Cz^3 - Dz^4 + \text{etc.}$ erit $\int \frac{Q\,dz}{z} = Az - \frac{Bz^2}{2} + \frac{Cz^3}{3} - \frac{Dz^4}{4} + \text{etc.}$ cuius ſeriei valor itaque exprimet logarithmum huius ſeriei $R = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \text{etc.}$

Quemadmodum igitur eſt:

$$l(1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \text{etc.}) = Az - \tfrac{1}{2}Bz^2 + \tfrac{1}{3}Cz^3 - \tfrac{1}{4}Dz^4 + \text{etc.}$$

ita etiam ex aequatione $\int \frac{P\,dz}{z} = -lS$ erit

$$l(1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \text{etc.}) = -Az - \tfrac{1}{2}Bz^2 - \tfrac{1}{3}Cz^3 - \tfrac{1}{4}Dz^4 - \text{etc.}$$

Quare ſi k ſcribatur pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus eſt $= 1$, habebitur:

$$1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma^3 + \delta z^4 + \text{etc.} = k^{Az - \frac{1}{2}Bz^2 + \frac{1}{3}Cz^3 - \frac{1}{4}Dz^4 + \text{etc.}}$$

et

et

$$1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4 - \text{etc} = k^{-Az - \frac{1}{2}Bz^2 - \frac{1}{3}Cz^3 - \frac{1}{4}Dz^4 - \text{etc.}}$$

§. 11. Notatu praeterea dignae ſunt expreſſiones harum R et S reciprocae nempe $\frac{1}{R}$ et $\frac{1}{S}$. Eſt vero $\frac{1}{S} = \frac{1}{(1-az)(1-bz)(1-cz)(1-dz)\,\text{etc.}}$ ad cuius fractionis valorem per ſeriem, cuius termini ſecundum poteſtates ipſius z progrediantur, exprimendum, perſpicuum eſt in ſe inuicem multiplicari oportere cunctas has progreſſiones geometricas

$$\frac{1}{1-az} = 1 + az + a^2 z^2 + a^3 z^3 + a^4 z^4 + \text{etc.}$$
$$\frac{1}{1-bz} = 1 + bz + b^2 z^2 + b^3 z^3 + b^4 z^4 + \text{etc.}$$
$$\frac{1}{1-cz} = 1 + cz + c^2 z^2 + c^3 z^3 + c^4 z^4 + \text{etc.}$$
$$\frac{1}{1-dz} = 1 + dz + d^2 z^2 + d^3 z^3 + d^4 z^4 + \text{etc.}$$

In Producto autem poſt primum terminum 1 coëfficiens ipſius z erit ſumma quantitatum $a + b + c + d +$ etc. coëfficiens ipſius z erit ſumma factorum ex binis non excipiendo factores aequales in eodem facto; coëfficiens ipſius z^3 etit ſumma factorum ex ternis, et ita porro quas productorum ſummas ſupra (§. 4) litteris alphabethi geometrici $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, etc. deſignauimus.

His itaque litteris introductis habebimus:

$$\frac{1}{S} = 1 + \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 + \mathfrak{E}z^5 + \text{etc.}$$

atque ſimili modo valorem ipſius R tractando erit:

$$\frac{1}{R} = 1 - \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 - \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 - \mathfrak{E}z^5 + \text{etc.}$$

§. 12. Hae ergo ſeries reciprocae ſunt earum, quas ſupra ſub litteris R et S (§. 7) protulimus. Atque hanc ob cauſam erit:

1 =

$1 = (1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4+ \text{etc.})\ (1-\mathfrak{A}z+\mathfrak{B}z^2$
$-\mathfrak{C}z^3+\mathfrak{D}z^4+ \text{etc.})$ pariterque
$1 = (1-\alpha z+\beta z^2-\gamma z^3+\delta z^4- \text{etc.})(1+\mathfrak{A}z+\mathfrak{B}z^2$
$+\mathfrak{C}z^3+\mathfrak{D}z^4+\text{etc.})$

Ex vtraque autem ſequitur vna eademque relatio inter valores litterum $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ etc. et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, erit ſcilicet:

$$\mathfrak{A}-\alpha = 0$$
$$\mathfrak{B}-\alpha\mathfrak{A}+\beta = 0$$
$$\mathfrak{C}-\alpha\mathfrak{B}+\beta\mathfrak{A}-\gamma = 0$$
$$\mathfrak{D}-\alpha\mathfrak{C}+\beta\mathfrak{B}-\gamma\mathfrak{A}+\delta = 0$$
etc.

quam eandem relationem iam ſupra (§. 5) tradidimus.

§. 13. Quodſi ponamus $\frac{1}{R} = T$ et $\frac{1}{S} = V$, vt ſit

$$T = 1-\mathfrak{A}z+\mathfrak{B}z^2-\mathfrak{C}z^3+\mathfrak{D}z^4-\text{etc.}$$
et $V = 1-\mathfrak{A}z+\mathfrak{B}z^2+\mathfrak{C}z^3+\mathfrak{D}z^4+\text{etc.}$

erit $\frac{dR}{R} = -\frac{dT}{T}$ et $\frac{dS}{S} = -\frac{dV}{V}$; hincque fiet $P = \frac{z\,dV}{V\,dz}$ et $Q = -\frac{z\,dT}{T\,dz}$. Quare cum

ſit $\frac{z\,dV}{dz} = \mathfrak{A}z+2\mathfrak{B}z^2+3\mathfrak{C}z^3+4\mathfrak{D}z^4+\text{etc.}$
et $-\frac{z\,dT}{dz} = \mathfrak{A}z-2\mathfrak{B}z^2+3\mathfrak{C}z^3-4\mathfrak{D}z^4+\text{etc}$

habebimus loco P et Q valores debitos ex (§. 6.) ſcribendo has aequationes

$$Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\text{etc.} = \frac{\mathfrak{A}z+2\mathfrak{B}z^2+3\mathfrak{C}z^3+4\mathfrak{D}z^4+\text{etc.}}{1+\mathfrak{A}z+\mathfrak{B}z^2+\mathfrak{C}z^3+\mathfrak{D}z^4+\text{etc.}}$$

et

$$Az-Bz^2+Cz^3-Dz^4+\text{etc.} = \frac{\mathfrak{A}z-2\mathfrak{B}z^2+3\mathfrak{C}z^3-4\mathfrak{D}z^4+\text{etc.}}{1-\mathfrak{A}z+\mathfrak{B}z^2-\mathfrak{C}z^3+\mathfrak{D}z^4-\text{etc.}}$$

ex quibus eadem ſequitur relatio inter litteras A, B, C, D, etc. et $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, etc. quam ſupra (§. 5.) dedimus. Erit ſcilicet

$\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} = A$$
$$2\,\mathfrak{B} = \mathfrak{A}A + \mathfrak{B}$$
$$3\,\mathfrak{C} = \mathfrak{B}A + \mathfrak{A}B + C$$
$$4\,\mathfrak{D} = \mathfrak{C}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{A}C + D$$
$$5\,\mathfrak{E} = \mathfrak{D}A + \mathfrak{C}B + \mathfrak{B}C + AD + E$$

etc.

§. 14 Ex aequationibus (§. 12.) datis ſequitur fore

$$l(1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\text{etc.}) = -l(1-\mathfrak{A}z+\mathfrak{B}z^2-\mathfrak{C}z^3+\text{etc.})$$

et

$$l(1-\alpha z+\beta z^2-\gamma z^3+\text{etc.}) = -l(1+\mathfrak{A}z+\mathfrak{B}z^2+\mathfrak{C}z^3+\text{etc.})$$

His igitur ad §. 10. accommodatis erit:

$$l(1-\mathfrak{A}z+\mathfrak{B}z^2-\mathfrak{C}z^3+\text{etc.}) = -Az+\tfrac{1}{2}Bz^2-Cz^3+\tfrac{1}{4}Dz^4-\text{etc.}$$

et

$$l(1+\mathfrak{A}z+\mathfrak{B}z^2+\mathfrak{C}z^3+\text{etc.}) = Az+\tfrac{1}{2}Bz^2+\tfrac{1}{3}Cz^3+\tfrac{1}{4}Dz^4+\text{etc.}$$

Hincque ſumto k pro numero, cuius logarithmus $=1$ erit

$$1-\mathfrak{A}z+\mathfrak{B}z^2-\mathfrak{C}z^4+\text{etc.} = k^{-Az+\frac{1}{2}Bz^2-\frac{1}{3}Cz^3+\frac{1}{4}Dz^4-\text{etc.}}$$

atque

$$1+\mathfrak{A}z+\mathfrak{B}z^2+\mathfrak{C}z^4+\text{etc.} = k^{Az+\frac{1}{2}Bz^2+\frac{1}{3}Cz^3+\frac{1}{4}Dz^4+\text{etc.}}$$

§. 15. Si iam litterae R et S retineant valores ſupra aſſumtos (§. 7.) erit

$$1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4+\text{etc.} = R$$
$$1-\mathfrak{A}z+\mathfrak{B}z^2-\mathfrak{C}z^3+\mathfrak{D}z^4-\text{etc.} = \tfrac{1}{R}$$

et

$$1-\alpha z+\beta z^2-\gamma z^3+\delta z^4-\text{etc.} = S$$
$$1+\mathfrak{A}z+\mathfrak{B}z^2+\mathfrak{C}z^3+\mathfrak{D}z^4+\text{etc.} = \tfrac{1}{S}$$

Ex quibus deducuntur ſequentia conſectaria.

$$1+\beta z^2+\delta z^4+\zeta z^6+\theta z^8+\text{etc.} = \frac{R+S}{2}$$
$$\alpha z+\gamma z^3+\varepsilon z^5+\eta z^7+\iota z^9+\text{etc.} = \frac{R-S}{2}$$

$$1+\mathfrak{B}z^2+\mathfrak{D}z^4+\mathfrak{F}z^6+\mathfrak{H}z^8+\text{etc.}=\frac{R+S}{2RS}$$

$$\mathfrak{A}z+\mathfrak{C}z^3+\mathfrak{E}z^5+\mathfrak{G}z^7+\mathfrak{J}z^9+\text{etc.}=\frac{R-S}{2RS}$$

hincque colligitur iſta proportio:

$$1+\beta z^2+\delta z^4+\zeta z^6+\text{etc.}:\alpha z+\gamma z^3+\varepsilon z^5+\eta z^7+\text{etc.}=$$

$$1+\mathfrak{B}z^2+\mathfrak{D}z^4+\mathfrak{F}z^6+\text{etc.}:\mathfrak{A}z+\mathfrak{C}z^3+\mathfrak{E}z^5+\mathfrak{G}z^7+\text{etc.}=$$

Cum praeterea ſit:

$$R-1=\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4+\text{etc.}$$

$$1-\tfrac{1}{R}=\mathfrak{A}z-\mathfrak{B}z^2+\mathfrak{C}z^3+\mathfrak{D}z^4+\text{etc.}$$

erit

$$R=\frac{\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4+\text{etc.}}{\mathfrak{A}z-\mathfrak{B}z^2+\mathfrak{C}z^3-\mathfrak{D}z^4+\text{etc.}}$$

ſimilique modo propter

$$1-S=\alpha z-\beta z^2+\gamma z^3-\delta z^4+\text{etc.}$$

$$\tfrac{1}{S}-1=\mathfrak{A}z+\mathfrak{B}z^2+\mathfrak{C}z^3+\mathfrak{D}z^4+\text{etc.}$$

erit

$$S=\frac{\alpha z-\beta z^2+\gamma z^3-\delta z^4+\text{etc.}}{\mathfrak{A}z+\mathfrak{B}z^2+\mathfrak{C}z^3+\mathfrak{D}z^4+\text{etc.}}$$

§. 16. Deinde vero ſi vt ſupra (§. 6.) ponamus

$$P=Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\text{etc.}$$

$$Q=Az-Bz^2+Cz^3-Dz^4+\text{etc.}$$

erit ex paragr. 9.

$$\alpha z+2\beta z^2+3\gamma z^3+4\delta z^4+\text{etc.}=QR$$

$$\alpha z-2\beta z^2+3\gamma z^3-4\delta z^4+\text{etc.}=PS$$

ſimilique modo ex paragr. 13 habebitur

$$\mathfrak{A}z+2\mathfrak{B}z^2+3\mathfrak{C}z^3+4\mathfrak{D}z^4+\text{etc.}=\frac{P}{S}$$

$$\mathfrak{A}z-2\mathfrak{B}z^2+3\mathfrak{C}z^3+4\mathfrak{D}z^4+\text{etc.}=\frac{Q}{R}$$

Exquibus ſequentia corollaria facile deriuantur

$$\frac{\alpha z-2\beta z^2+3\gamma z^3+4\delta z^4+\text{etc.}}{Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\text{etc.}}=S=\frac{Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\text{etc.}}{\mathfrak{A}z+2\mathfrak{B}z^2+3\mathfrak{C}z^3+4\mathfrak{D}z^4+\text{etc.}}$$

$$\frac{\alpha z+2\beta z^2+3\gamma z^3+4\delta z^4+\text{etc.}}{Az-Bz^2+Cz^3-Dz^4+\text{etc.}}=R=\frac{Az-Bz^2+Cz^3-Dz^4+\text{etc.}}{\mathfrak{A}z-2\mathfrak{B}z^2+3\mathfrak{C}z^3-4\mathfrak{D}z^4+\text{etc.}}$$

Pro

Pro litteris igitur R et S habemus quintuplices valores hos:

$$R = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \text{etc.}$$

$$R = \frac{1}{1 - \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 - \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 - \text{etc.}}$$

$$R = \frac{\alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \text{etc.}}{\mathfrak{A}z - \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 - \mathfrak{D}z^4 + \text{etc.}}$$

$$R = \frac{\alpha z + 2\beta z^2 + 3\gamma z^3 + 4\delta z^4 + \text{etc.}}{Az - Bz^2 + Cz^3 - Dz^4 + \text{etc.}}$$

$$R = \frac{Az - Bz^2 + Cz^3 - Dz^4 + \text{etc.}}{\mathfrak{A}z - 2\mathfrak{B}z^2 + 3\mathfrak{C}z^3 - 4\mathfrak{D}z^4 + \text{etc.}}$$

qui poſito $-z$ loco z totidem praebent valores pro S. Atque ex horum quinque valorum multiplici combinatione quam plurimae proprietates elici poſſunt, quas terni litterarum noſtrarum ordines, ſcillcet: A, B, C, D etc. α, β, γ, δ, etc. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. inter ſe tenent, quibus autem euoluendis hic ſuperſedemus.

§. 17. His, quae latiſſime ptent, paraemiſſis atque expoſitis ad magis particularia deſcendamus, ac primo quidem pro ſerie litterarum a, b, c, d, etc. accipiatur progreſſio geometrica infinita haec: $n, n^2, n^3, n^4, n^5, n^6$, etc. qua in formulas ſuperiores ſucceſſiue introducta habebimus:

$$A = n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5 + \text{etc.} = \frac{n}{1-n}$$

$$B = n^2 + n^4 + n^6 + n^8 + n^{10} + \text{etc.} = \frac{nn}{1-nn}$$

$$C = n^3 + n^6 + n^9 + n^{12} + n^{15} + \text{etc.} = \frac{n^3}{1-n^3}$$

$$D = n^4 + n^8 + n^{12} + n^{16} + n^{20} + \text{etc.} = \frac{n^4}{1-n^4}$$

etc.

Iam ex §. 6 duplices pro litteris P et Q nanciſcimur vares, qui erunt:

$$P = \frac{nz}{1-nz} + \frac{n^2 z}{1-n^2 z} + \frac{n^3 z}{1-n^3 z} + \frac{n^4 z}{1-n^4 z} + \text{etc.}$$

$$Q = \frac{nz}{1-nz} + \frac{n^2z}{1+n^2z} + \frac{n^3z}{1+n^3z} + \frac{n^4z}{1+n^4z} + \text{etc.}$$

hincque ex inuentis litterarum A, B, C, D, etc. valoribus naſcentur hi alteri:

$$P = \frac{nz}{1-n} + \frac{nnz^2}{1-nn} + \frac{n^3z^3}{1-n^3} + \frac{n^4z^4}{1-n^4} + \text{etc.}$$

$$Q = \frac{nz}{1-n} - \frac{n^2z^2}{1-nn} + \frac{n^3z^3}{1-n^3} - \frac{n^4z^4}{1-n^4} + \text{etc.}$$

§. 18. Ex paragr. porro 7 habebimus pro R et S ſequentes expreſſiones:

$$R = (1+nz)(1+n^2z)(1+n^3z)(1+n^4z) \text{ etc.}$$

$$S = (1-nz)(1-n^2z)(1-n^3z)(1-n^4z) \text{ etc.}$$

qui factores actu in ſe multiplicati, et producta ſecundum dimenſiones ipſius z ordinata praebebunt pro R et S has ſeries:

$$R = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \text{etc.}$$

$$S = 1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4 - \text{etc.}$$

vbi litterae $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc ex ſerie aſſumta

$$n,\ n^2,\ n^3,\ n^4,\ n^5\ n^6,\ n^7, \text{ etc.}$$

ita determinabuntur, vt ſit:

I. $\alpha =$ ſummae ſingulorum terminorum; vnde erit:

$$\alpha = n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5 + n^6 + n^7 + \text{etc.}$$

quae eſt ipſa progreſſio geometrica aſſumta in qua quaevis poteſtas ipſius n occurrit, atque coëfficientem habet $+1$.

II. $\beta =$ ſummae factorum ex binis terminis: vnde erit:

$$\beta = n^3 + n^4 + 2n^5 + 2n^6 + 3n^7 + 3n^8 + 4n^9 + 4n^{10} + \text{etc.}$$

in qua ſerie poſt poteſtatem tertiam omnes ſequentes ipſius n poteſtates occurrunt: quaelibet autem poteſtas toties occurrit, quoties ex multiplicatione binorum terminorum ſeriei α oriri poteſt. Cum autem multiplicatio poteſtatum conſiſtat in exponentium additione, coëfficiens cuiusque poteſtatis ipſius n in ſerie β oſtendet, quot va-

riis

riis modis exponens ipſius n poſſit in duas partes inaequales diſtribui, ſeu quoties iſte exponens ex additione duorum numerorum integrorum inaequalium produci queat. Sic poteſtatis decimae n^{10} coëfficiens eſt 4, quia 10 quatuor modis in duas partes inaequales diſtribui poteſt nempe $10 = 1 + 9$; $10 = 3 + 7$.
$10 = 2 + 8$; $10 = 4 + 6$.

III. $\gamma =$ ſummae factorum ex ternis terminis ſeriei α inaequalibus; vnde erit:

$$\gamma = n^6 + n^7 + 2n^8 + 3n^9 + 4n^{10} + 5n^{11} + 7n^{12} + 8n^{13} + \text{etc.}$$

in qua poſt poteſtatem ſextam omnes ſequentes ipſius n poteſtates occurrunt. Cuiuslibet autem poteſtatis coëfficiens indicat, quot variis modis exponens diſtribui poſſit in tres partes inaequales, ſeu quoties idem exponens produci queat ex additione trium numerorum integrorum inter ſe inaequalium. Sic poteſtas n^{12} coëfficientem habet 7, quia exponens 12 ſeptem modis in tres partes inaequales partiri poteſt: vti

$12 = 1 + 2 + 9$; $12 = 2 + 3 + 7$
$12 = 1 + 3 + 8$; $12 = 2 + 4 + 6$
$12 = 1 + 4 + 7$; $12 = 3 + 4 + 5$
$12 = 1 + 5 + 6$;

IV. $\delta =$ ſummae factorum ex quatuor terminis ſeriei α inaequalibus inter ſe, vnde erit

$$\delta = n^{10} + n^{11} + 2n^{12} + 3n^{13} + 5n^{14} + 6n^{15} + 9n^{16} + \text{etc.}$$

cuius prima poteſtas eſt n^{10}, quippe cuius exponens eſt $1+2+3+4$ ſeu numerus trigonalis quartus. Sequentium poteſtatum quaelibet toties adeſt, quoties eius exponens oriri poteſt ex additione quatuor numerorum integrorum inter ſe inaequalium. Sic poteſtas ſexta decima

ma n^{16} coëfficientem habet 9, quia 16 nouem modis in quatuor partes inter ſe inaequales diſpertiri poteſt, quae nouem partitiones ſunt:

$$16 = 1 + 2 + 3 + 10;\quad 16 = 1 + 3 + 4 + 8$$
$$16 = 1 + 2 + 4 + 9;\quad 16 = 1 + 3 + 5 + 7$$
$$16 = 1 + 2 + 5 + 8;\quad 16 = 1 + 4 + 5 + 6$$
$$16 = 1 + 2 + 6 + 7;\quad 16 = 2 + 3 + 4 + 7$$
$$16 = 2 + 3 + 5 + 6$$

Simili modo res ſe habet in ſequentium litterarum ε, ζ, η, etc. valoribus qui erunt

$$\varepsilon = n^{15} + n^{16} + 2n^{17} + 3n^{18} + 5n^{19} + 7n^{20} + 10n^{21} + \text{etc.}$$
$$\zeta = n^{21} + n^{22} + 2n^{23} + 3n^{24} + 5n^{25} + 7n^{26} + 11n^{27} + \text{etc.}$$
$$\eta = n^{28} + n^{29} + 2n^{30} + 3n^{31} + 5n^{32} + 7n^{33} + 11n^{34} + \text{etc.}$$
etc.

in quibus ſeriebus omnibus cuiusuis ipſius n poteſtatis coëfficiens indicat, quot variis modis exponens ipſius n poſſit reſolui in tot partes inaequales, quota ſeries eſt a principio numerata. Seu coëfficiens cuiusque termini declarat, quoties exponens ipſius n oriri queat ex additione tot numerorum integrorum inter ſe inaequalium quota ipſa ſeries, ex qua terminus deſumitur, eſt, numerando a prima α. Sic in ſerie ſeptima coëfficiens poteſtatis n^{34} eſt 11, quia numerus 34 vndecim modis diſtribui poteſt in ſeptem partes inaequales, quae diſtributiones ſunt:

$$34 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 13$$
$$34 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 12$$
$$34 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 8 + 11$$
$$34 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 9 + 10$$
$$34 = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 11$$
$$34 = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 10$$

34 =

$34 = 1 + 2 + 3 + 4 + 7 + 8 + 9$
$34 = 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 10$
$34 = 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 8 + 9$
$34 = 1 + 2 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9$
$34 = 1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$

Atque ex his natura ſerierum, quae hoc pacto pro litteris α, β, γ, δ, etc. prodeunt, facile perſpicitur.

§. 19. Inueſtigando igitur, quot variis modis quisque numerus in partes inaequales numero datas diſtribui poſſit, ſeries iſtae litteris α, β, γ, δ, etc. ſignatae formari poterunt: quod autem opus foret ſummopere moleſtum. Viciſſim autem ex his ſeriebus aliunde cognitis et formatis reſolui poterit problema hoc non inelegans, quod mihi a Viro Clar. Naudaeo propoſitum ita ſehabet: „Definire, quot variis modis datus numerus produci que„at ex additione aliquot numerorum integrorum inter ſe „inaequalium; quorum numerus detur.

Sic Clariſſ Propoſitor quaerit, quot variis modis numerus 50 oriri poſſit ex additione ſeptem numerorrm integrorum inaequalium. Ad quam quaeſtionem reſoluendam manifeſtum eſt in ſubſidium vocari debere ſeriem η in qua coëfficiens cuiusque termini indicat, quot variis modis exponens ipſius n reſolui poſſit in 7 partes inaepuales. Quare ſeries illa

$\eta = n^{28} + n^{29} + 2n^{30} + 3n^{31} + 5n^{32} + 7n^{33} + 11n^{34} +$ etc.

cotninuari debebit vsque ad terminum, in quo poteſtas quinquageſima ipſius n continetur, cuius coëfficiens qui erit 522 oſtendet numerum 50 omnino 522 modis diverſis ex additione ſeptem numerorum integrorum interſe inaequalium produci poſſe. Ex quo perſpicuum eſt,

ſi

ſi modus habeatur commodus et facilis formandi illas ſeries α, β, γ, δ, etc. eo ipſo problema iſtud Naudaeanum perfectiſſime ſolutum iri.

§. 20. Cum igitur ſupra §. §. 5 et 9. modus traditus ſit inueniendi valores litterarum α, β, γ, δ, etc. ex cognitis valoribus litterarum A, B, C, D, etc. in praeſenti negotio reſolutionem facile expedire poterimus propterea quod ex §. 17 cognitos habemus valores A, B, C, D, etc. atque praeterea eſt, vt ſequitur

$$\alpha = A$$
$$\beta = \frac{\alpha A - B}{2}$$
$$\gamma = \frac{\beta A - \alpha B + C}{3}$$
$$\delta = \frac{\gamma A - \beta B + \alpha C - D}{4}$$
$$\varepsilon = \frac{\delta A - \gamma B + \beta C - \alpha D + E}{5}$$
etc.

Ex his igitur obtinebimus:

$$\alpha = \frac{n}{1-n}$$
$$2\beta = \frac{\alpha n}{1-n} - \frac{nn}{1-nn}$$
$$3\gamma = \frac{\beta n}{1-n} - \frac{\alpha n^2}{1-n^2} + \frac{n^3}{1-n^3}$$
$$4\delta = \frac{\gamma n}{1-n} - \frac{\beta n^2}{1-n^2} + \frac{\alpha n^3}{1-n^3} - \frac{n^4}{1-n^4}$$
etc.

Quod ſi autem loco α, β, γ, etc. ſucceſſiue ſubſtituantur valores ante reperti, prodibunt:

$$\alpha = \frac{n}{1-n}$$
$$\beta = \frac{n^3}{(1-n)(1-nn)}$$
$$\gamma = \frac{n^6}{(1-n)(1-nn)(1-n^3)}$$
$$\delta = \frac{n^{10}}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)}$$
$$\varepsilon = \frac{n^{15}}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)(1-n^5)}$$
etc.

Ex

Ex his itaque intelligitur eſſe in hoc caſu:

$\alpha = A$

$\beta = AB$

$\gamma = ABC$

$\delta = ABCD$

$\varepsilon = ABCDE$

etc.

§. 21. Lex haec, qua valores litterarum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. progredi ſunt inuenti, compluribus formulis euolutis obſeruatur, eiusque veritas niſi per inductionem adhuc non conſtat. Quo igitur haec veritas firmius confirmetur, conueniet eandem progreſſionis legem alio modo planiſſimo, in quo inductioni nullus locus relinquatur, elicere. Cum itaque nobis propoſitum ſit valores literarum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. indagare, quas ſortiuntur in ſerie

$R = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \varepsilon z^5 + \text{etc.}$

Si fuerit vti initio aſſumſimus.

$R = (1 + nz)(1 + n^2 z)(1 + n^3 z)(1 + n^4 z) \ldots$

notandum eſt ſi loco z ſcribatur nz, expreſſionem, cui modo R erat aequalis, mutari in hanc formam

$(1 + n^2 z)(1 + n^3 z)(1 + n^4 z)(1 + n^5 z) \ldots$

quae multiplicata per $1 + nz$ ipſam priorem expreſſionem producit. Quamobrem recte concludimus, ſi in ſerie

$1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \varepsilon z^5 + \text{etc.}$

loco z ſcribamus nz vt habeamus

$1 + \alpha nz + \beta n^2 z^2 + \gamma n^3 z^3 + \delta n^4 z^4 + \varepsilon n^5 z^5 + \text{etc.}$

hancque expreſſionem per $1 + nz$ multiplicemus, tum productum, quod erit

$$\begin{aligned} 1 &+ \alpha nz + \beta n^2 z^2 + \gamma n^3 z^3 + \delta n^4 z^4 + \varepsilon n^5 z^5 + \text{etc.} \\ &+ nz + \alpha n^2 z^2 + \beta n^3 z^3 + \gamma n^4 z^4 + \delta n^5 z^5 + \text{etc.} \end{aligned}$$

 ac-

aequale eſſe debere illi ipſi priori ſeriei
$1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \varepsilon z^5 +$ etc.
Quodſi ergo actu coëfficientes ttrminorum homologorum coëquemus, nanciſcemur ſequentes pro α, β, γ; etc determinationes.

$$\alpha = \frac{n}{1-n} = \frac{n}{1-n}$$
$$\beta = \frac{\alpha n^2}{1-n^2} = \frac{n^3}{(1-n)(1-n^2)}$$
$$\gamma = \frac{\beta n^3}{1-n^3} = \frac{n^6}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)}$$
$$\delta = \frac{\gamma n^4}{1-n^4} = \frac{n^{10}}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)}$$
etc.

§. 22. Hoc igitur modo inuenimus ſummas ſerierum illarum α, β, γ, δ etc. ſatis commode expreſſas ex quibus viciſſim ipſae illae ſeries formari poterunt. Nam cum illae ſeries ſecundum poteſtates ipſius n progrediantur eae prodire debebunt, ſi iſtae expreſſiones ſummarum per diuiſionem more conſueto euoluantur atque in ſeries infinitas ſecundum poteſtates ipſius n procedentes conuertantur. Quae operatio cum diuiſione abſoluatur manifeſtum eſt omnes illas ſeries α, β, γ, δ, etc. ad id genus pertinere, quod nomine ſerierum recurrentium indicari ſolet; atque adeo quilibet terminus ex aliquot praecedentibus determinabitur. Vt autem pateat, quomodo in ſingulis his ſeriebus quisque terminus ex praecedentibus ſit formandus, denominatores illarum expreſſionum pro l'tteris $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. inuentarum per multiplicationem actu euolui debent, quo facto habebitur:

$$\alpha = \frac{n}{1-n}$$
$$\beta = \frac{n^3}{1-n-n^2+n^3}$$
$$\gamma = \frac{n^6}{1-n-n^2+n^4+n^5-n^6}$$
$$\delta = \frac{n^{10}}{1-n-n^2+2n^5-n^8-n^9+n^{10}}$$

$\varepsilon =$

$$\varepsilon = \frac{n^{15}}{1-n-n^2+n^5+n^6+n^7-n^8-n^9-n^{10}+n^{13}+n^{14}-n^{15}}$$

$$\zeta = \frac{n^{21}}{1-n-n^2+n^5+2n^7-n^9-n^{10}-n^{11}-n^{12}+2n^{14}+n^{16}-n^{19}-n^{20}+n^{21}}$$

etc.

Atque ex his denominatoribus intelligitur, quomodo in ſingulis ſeriebus quisque terminus ex praecedentibus componi debeat, ſi praecepta, quae de formatione ſerierum recurrentium habentur, in ſubſidium vocentur.

§. 23. At ex forma expreſſionum pro litteris α, β, γ, δ, etc. inuentarum, qua quaelibet eſt productum ex praecedente in nouum quempiam factorem, alius deducitur modus ſatis idoneus ex quauis ſirie iam inuenta ſeriem ſequentem inueniendi. Sic, cum ſeries $\alpha = \frac{n}{1-n}$ ſit progreſſio geometrica

$\alpha = n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5 + n^6 + n^7 +$ etc.

ex hac reperietur ſeries β, ſi ea multiplicetur per $\frac{n^2}{1-n^2}$, vel ſi multiplicetur per hanc progreſſionem geometricam:

$n^2 + n^4 + n^6 + n^8 + n^{10} + n^{12} + n^{14} +$ etc.

Ex ſerie porro β hoc pacto inuenta, ſi ea multiplicetur per $\frac{n^3}{1-n^3} = n^3 + n^6 + n^9 + n^{12} + n^{15} + n^{18} +$ etc.

producetur ſeries γ. Haecque multiplicata per

$\frac{n^4}{1-n^4} = n^4 + n^8 + n^{12} + n^{16} + n^{20} + n^{24} +$ etc.

producet ſeriem δ. Atque ita porro ſeriem cuiusque ordinis multiplicando per certam quamdam progreſſionem geometricam reperietur ſeries ſequens. Hocque pacto non difficulter has ſeries quousque libuerit, continuare licebit: atque ſic problema ſupra memoratum a Clar. Naudaeo propoſitum reſoluetur.

§. 24. Facilius autem quaelibet ſeries ex ſe ipſa ope praecedentis poterit continuari, ſi ad modum reſpeciamus

 quo

quo valor cuiusque litterrarum α, β, γ, δ, etc. ex praecedente determinatur. Sic cum ſit $\beta = \frac{\alpha n^2}{1-n^2}$ eri $\beta = \beta nn + \alpha nn$; quare ſi ad ſeriem β per nn mutiplicatam addatur ſeries α per nn multiplicata, ipſa ſeries β oriri debebit. Cum igitur conſtet ſeriei β primum terminum eſſe n^3 ponamus:

$$\beta = \mathfrak{a}n^3 + \mathfrak{b}n^4 + \mathfrak{c}n^5 + \mathfrak{d}n^6 + \mathfrak{e}n^7 + \mathfrak{f}n^8 + \mathfrak{g}n^9 + \text{etc.}$$

eritque

$$\beta n^2 = \qquad + \mathfrak{a}n^5 + \mathfrak{b}n^6 + \mathfrak{c}n^7 + \mathfrak{d}n^8 + \mathfrak{e}n^9 + \text{etc.}$$

$$\alpha n^2 = n^3 + n^4 + n^5 + n^6 + n^7 + n^8 + n^9 + \text{etc.}$$

Aequatis iam terminis propter $\beta = \beta nn + \alpha nn$ habebimus:

$\mathfrak{a} = 1$	$\mathfrak{e} = \mathfrak{c} + 1 = 3.$
$\mathfrak{b} = 1$	$\mathfrak{f} = \mathfrak{d} + 1 = 3$
$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + 1 = 2$	$\mathfrak{g} = \mathfrak{e} + 1 = 4$
$\mathfrak{d} = \mathfrak{b} + 1 = 2.$	$\mathfrak{h} = \mathfrak{f} + 1 = 4.$

etc.

Simili modo cum ſit $\gamma = \frac{\beta n^3}{1-n^3}$ ſeu $\gamma = \gamma n^3 + \beta n^3$, ex ſerie β formabitur ſeries γ, atque porro ex ſerie γ ope aequationis $\delta = \delta n^4 + \gamma n^4$ producetur ſeries δ; pariterque ſequentes omnes conficientur.

§. 25. Quoniam in expreſſione

$$R = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \text{etc.}$$

valores litterarum α, β, γ, δ, etc inuenimus, ſitque

$$R = (1+nz)(1+n^2z)(1+n^3z)(1+n^4z)\ \ldots$$

conuertetur productum hoc ex infinitis factoribus conſtans:

$$(1+nz)(1+n^2z)(1+n^3z)(1+n^4z)\ \ldots$$

in ſeriem hanc ſecundum poteſtates ipſius z procedentem

$$1 + \frac{nz}{1-n} + \frac{n^3z^2}{(1-n)(1-n^2)} + \frac{n^6z^3}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)} + \frac{n^{10}z^4}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)} + \text{etc}$$

Atque ſummae huius ſeriei logarithmus hyperbolicus ex §. 10 erit $= \frac{nz}{1-n} - \frac{nnz^2}{2(1-n^2)} + \frac{n^3z^3}{3(1-n^3)} - \frac{n^4z^4}{4(1-n^4)} + \text{etc.}$

Vel ſi k ſcribatur pro numero, cuius logar. $= 1$. erit

k

$$k^{\frac{nz}{1-n} - \frac{n^2 z^2}{2(1-n^2)} + \frac{n^3 z^3}{3(1-n^3)} - \frac{n^4 z^4}{4(1-n^4)} + \text{etc.}} = R$$

ſeu iſta expreſſio exponentialis eſt aequalis ſummae illius ſeriei, in quam valorem ipſius R transmutauimus.

§. 26. Verum vt ad propoſitum problema reuertamur quo definiendum ſit, quot variis modis datus numerus m, partiri queat in μ partes inaequales inter ſe et integras; indicemus hunc modorum numerum, quem quaerimus, huiusmodi ſcriptione $m^{(\mu)i}$ qua nobis perpetuo numerus modorum indicetur, quibus numerus m per additionem produci queat ex μ numeris integris inter ſe inaequalibus; atque ad hanc partium inaequalitatem denotandam ſupra litteram i adiunximus; quae omittetur ſi quaeſtio formabitur, de numero modorum inueniendo, quibus datus numerus m omnino in μ partes tam aequales quam inaequales diſtribui queat. Quod problema poſtea pari facilitate ſolutum exhibebitur.

§. 27. Iſte ergo modorum numerus $m^{(\mu)i}$ erit coëfficiens poteſtatis n^m in illa ſerierum α, β, γ, δ, ε, etc. quae a prima α numerata in ordine eſt *tota* quot μ continet vnitates. Huius autem ſeriei ſumma eſt $=$

$$\frac{n^{\frac{\mu(\mu+1)}{1\cdot 2}}}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)\ldots\ldots\ldots(1-n^\mu)}$$

ideoque ſeriei, quae ex hac forma naſcitur terminus generalis eſt $= m^{(\mu)i} n^m$. Seriei autem quae naſcitur ex hac forma

$$\frac{n^{\frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}}}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)\ldots\ldots(1-n^\mu)}$$

terminus generalis erit $= m^{(\mu)i} n^{m-\mu}$, ſeu pro eadem ipſius n poteſtate erit terminus generalis $= (m+\mu)^{(\mu)i} n^m$. Subtrahatur prior expreſſio a poſteriore, atque reſiduae expreſſionis

 n

$$\frac{n^{\frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}}}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)\;.\;.\;.\;.\;.\;(1-n^{\mu-1})}$$

terminus generalis erit $= n^m((m+\mu)^{(\mu)i} - m^{(\mu)i})$ huius autem eiusdem ſeriei terminus generalis eſt $m^{(\mu-1)i}\, n^m$, quocirca habebimus:

$$m^{(\mu-1)i} = (m+\mu)^{(\mu)i} - m^{(\mu)i}$$

vnde hanc adipiſcimur regulam, vt ſit

$$(m+\mu)^{(\mu)i} = m^{(\mu)i} + m^{(\mu-1)i}$$

cuius ope, ſi conſtiterit, quod varies modis numerus m diſtribui poſſit cum in μ partes, tum in $\mu - 1$ partes inaequales, hos binos modorum numeros addendo reperietur, quot variis modis numerus maior $m + \mu$ diſtribui poſſit in μ partes inaequales. Atque ita reſolutio caſuum difficiliorum ad ſimpliciores reducitur, atque tandem ad ſimpliciſſimos per ſe notos; quippe conſtat, ſi fuerit $m < \frac{\mu\mu+\mu}{2}$ tum fore $m^{(\mu)i} = 0$, et ſi fuerit $m = \frac{\mu\mu+\mu}{2}$, tum erit $m^{(\mu)i} = 1$.

§. 28. Cum formula $m^{(\mu)i}$ ſit terminus generalis huius expreſſionis

$$\frac{n^{\frac{\mu(\mu+1)}{2}}}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)\ldots\ldots(1-n^{\mu})}$$

Videamus qualem ſeriem praebeat iſta expreſſio

$$\frac{1}{(1-n)(1-n^2)(1-{}^3)\ldots\ldots(1-n^{\mu})}$$

ſi euoluatur, atque ſecundum dimenſiones ipſius n diſponatur. Ponamus autem prodire hanc ſeriem

$$1 + an + \beta n^2 + 2 n^3 + n^4 + \quad n^5 + \text{etc.}$$

ex cuius generatione perſpicitur, coëfficientem cuiusque poteſta-

poteſtatis ipſius n monſtare quot variis modis exponens ipſius n per additionem produci queat ex his datis numeris

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots \mu$$

hicque nec certus partium numerus praeſcribitur, ex quibus componatur, nec iſta conditio ponitur, vt partes ſint inter ſe inaequales. Hanc itaque ob cauſam expreſſio $m^{(\mu)i}$ ſimul indicabit, quot variis omnino modis numerus $m - \frac{\mu(\mu+1)}{2}$ per additionem prodici queat ex numeris 1, 2, 3, 4, 5, ... μ. Sic ſi quaeratur quot variis modis numerus 50 diſtribui poſſit in 7 partes inaequales, propter $m = 50$ et $\mu = 7$, quaeſtio eo reducitur, vt inueſtigetur quod varis modis nummerus 50 – 28 ſeu 22 oriri queat per additionem ex his ſeptem numeris: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Hoc ergo pacto duplicis generis quaeſtiones vna eademque opera reſolvuntur.

§. 29. Definitis hoc pacto littiris α, β, γ, δ, etc. pro caſu, quo loco litterarum a, b, c, d, etc. progreſſionem geometricam n, n^2, n^3, n^4, n^5, etc. infinitam aſſumſimus, ordo poſtulat, vt etiam in valores tertii ordinis $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, etc. inquiramus. Adhibuimus autem has litteras $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. in ſeriebus, his valoribus $\frac{1}{R}$, et $\frac{1}{S}$ aequalibus, ſumſimus enim ſupra §. 11. eſſe

$$\tfrac{1}{S} = 1 + \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 + \mathfrak{E}z^5 + \text{etc.}$$

et

$$\tfrac{1}{R} = 1 - \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 - \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 - \mathfrak{E}z^5 + \text{etc.}$$

obtinentibus R et S valores primum aſſumtos quibus erat:

R

$R = (1 + nz)(1 + n^2 z)(1 + n^3 z)(1 + n^4 z)$ etc.
$S = (1 - nz)(1 - n^2 z)(1 - n^3 z)(1 - n^4 z)$ etc.
Intelligitur autem hinc ſeriem

$$\frac{1}{S} = 1 + \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 + \text{etc.}$$

oriri, ſi innumerabiles iſtae progreſſiones geometricae in ſe inuicem multiplicentur.

$$\frac{1}{1-nz} = 1 + nz + n^2 z^2 + n^3 z^3 + n^4 z^4 + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{1-n^2 z} = 1 + n^2 z + n^4 z^2 + n^6 z^3 + n^8 z^4 + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{1-n^3 z} = 1 + n^3 z + n^6 z^2 + n^9 z^3 + n^{12} z^4 + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{1-n^4 z} = 1 + n^4 z + n^8 z^2 + n^{12} z^3 + n^{16} z^4 + \text{etc.}$$

etc.

Poſito autem $-z$ loco z prodit ſimili modo ſeries $\frac{1}{R}$.

§. 30. Ex iſta harum ſerierum generatione manifeſtum eſt eſſe:

I. $\mathfrak{A} = n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5 + \text{etc.}$
quae eſt progreſſio geometrica omnes ipſius n poteſtates complectens ſingulas per coëfficientem $+ 1$ multiplicatas.

II. $\mathfrak{B} = n^3 + n^4 + 2n^5 + 2n^6 + 3n^7 + 3n^8 + 4n^9 + 4n^{10} + \text{etc.}$
in qua coëfficiens cuiusque ipſius n poteſtatis tot continet vnitates, quot variis modis exponens ipſius n in duas partes ſiue aequales ſiue inaequales partiri poteſt. Sic poteſtatis n^8 coëfficiens eſt 4 quia 8 quatuor modis in 2 partes partitur

$8 = 1 + 7$; $8 = 3 + 5$
$8 = 2 + 6$; $8 = 4 + 4$

III. $\mathfrak{C} = n^3 + n^4 + 2n^5 + 3n^6 + 4n^7 + 5n^8 + 7n^9$ etc.
in qua cuiusque poteſtatis ipſius n coëfficiens tot continet vnitates, quot variis modis exponens ipſius n in tres

tres partes ſiue aequales ſiue inaequales diſtribui poteſt, ſic n^9 coëfficientem habet 7, quia 7 modis 9 in tres partes diſpertiri ſe patitur.

$$9 = 1 + 1 + 7; \quad 9 = 2 + 2 + 5$$
$$9 = 1 + 2 + 6; \quad 9 = 2 + 3 + 4$$
$$9 = 1 + 3 + 5; \quad 9 = 3 + 3 + 3$$
$$9 = 1 + 4 + 4;$$

IV. $\mathfrak{D} = n^4 + n^5 + 2n^6 + 3n^7 + 5n^8 + 6n^9 + 9n^{10} +$ etc. vbi cuiusque poteſtatis ipſius n coëfficiens tot continet vnitates, quot variis modis exponens ipſius n in quatuor partes ſiue aequales ſiue inaequales reſolui poteſt. Atque ſimilis eſt ratio ſequentium ſerierum; quae pro litteris $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, etc. reperiuntur.

§. 31. Harum ergo ſerierum ope alterum problema, quod ſimul cum praecedente Vir Cl. Naudaeus mihi propoſuit, reſolui poteſt, quot ita ſe habet.

„Inuenire quot variis modis datus numers m partiri „poſſit in μ partes tam aequales quam inaequales:

„Siue inueniri quot variis modis datus numerus m „per additionem μ numerorum integrorum ſiue aequa„lium ſiue inaequalium produci queat

Quod problema a praecedente eo tantum diſcrepat, quod in praecedente partitio ad partes tantum inter ſe inaequales ſit reſtricta, haec autem partes quoque aequales admittat. Ad numerum autem omnium modorum in hoc problemate quaeſitum ſigno exprimendum vtamur hac forma:

$$m^{(\mu)}$$

quae ſcilicet declaret, quot variis modis numerus m partiri queat in μ partes integras, partium aliquot aequa-

litate non excluſa: quamobrem in ſigno ſupra affixo (μ) ante adnexa littera i, qua inaequalitas partium indicabatur, hic eſt praetermiſſa.

§. 32. Solutio ergo huius problematis ad formationem ſerierum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, etc. reducitur, at ſupra iam oſtendimus (§. 5) quomodo harum litterarum valores ex valoribus litterarum α, β, γ, δ, etc. iam cognitis definiantur. Quanquam autem iſte modus eſt generalis et ex rei natura petitus, tamen non ſatis dilucide legem, qua hi valores progrediuntur, ob oculos ponit. Quamobrem valores harum litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, etc. via huic caſui propria inueſtigabo, ſimili ei, qua ſupra (§. 21) vſus ſum.

Quoniam eſt

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{(1-nz)(1-n^2z)(1-n^3z)(1-n^4z)\,etc.}$$

perſpicuum eſt, ſi in hac forma loco z ſcribatur nz, tum prodituram eſſe hanc formam

$$\frac{1}{(1-n^2z)(1-n^3z)(1-n^4z)(1-n^5z)\,etc.}$$

Ad ipſam autem hanc formam prior $\frac{1}{s}$ perducitur, ſi ea multiplicetur per $1-nz$. Hancobrem cum aſſumſerimus eſſe

$$\frac{1}{s} = 1 + \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 + \mathfrak{E}z^5 + \text{etc.}$$

ponamus in hac nz loco z, habebimusque

$$1 + \mathfrak{A}nz + \mathfrak{B}n^2z^2 + \mathfrak{C}n^3z^3 + \mathfrak{D}n^4z^4 + \text{etc.}$$

Iam priorem ſeriem $\frac{1}{s}$ multiplicemus per $1-nz$

$$1 + \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 + \text{etc.}$$
$$-\,nz - \mathfrak{A}nz^2 - \mathfrak{B}nz^3 + \mathfrak{C}nz^4 + \text{etc.}$$

Quae forma cum illi eſſe debeat aequalis, erit

$\mathfrak{A} =$

$$\mathfrak{A} = \frac{n}{1-n} = \frac{n}{1-n}$$
$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}\,n}{1-n^2} = \frac{n^2}{(1-n)(1-n^2)}$$
$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}\,n}{1-n^3} = \frac{n^3}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)}$$
$$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{C}\,n}{1-n^4} = \frac{n^4}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)}$$
etc.

§. 33. Hinc igitur noua percipitur relatio inter valores litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. et litterarum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. quae eo magis eſt notatu digna quo minus hi valores a ſe inuicem diſcrepant Collato enim (§. 21) intelligitur eſſe:

$$\alpha = \mathfrak{A}$$
$$\beta = n\,\mathfrak{B}$$
$$\gamma = n^3\,\mathfrak{C}$$
$$\delta = n^6\,\mathfrak{D}$$
$$\varepsilon = n^{1}\,\mathfrak{E}$$
etc.

Manifeſtum ergo eſt ratione coëfficientium ſeries $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. omnino cum ſeriebus $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. congruere, totumque diſcrimen in exponentibus ipſius n ſitum eſſe. In ſerie quidem $\mathfrak{A}$, exponentes quoque aequales ſunt exponentibus in ſerie α; at in ſerie $\mathfrak{B}$ exponentes vnitate deficiunt ab exponentibus ſeriei β: in ſerie $\mathfrak{C}$ exponentes ternario deficiunt ab exponentibus ſeriei γ: et ita porro defectus ſecundum numeros trigonales progrediuntur.

§. 34. Ex ſeriebus ergo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. quas ſupra formare docuimus, et quibus prius problema Naudaeanum reſoluitur, ſimul hoc poſterius problema a Naudaeo propoſitum ita reſolui poteſt, vt eius ſolutio reducatur ad

 ſolu-

ſolutionem prioris. Erit nempe

$$m^{(1)} = m^{(1)i}$$
$$m^{(2)} = (m+1)^{(2)i}$$
$$m^{(3)} = (m+3)^{(3)i}$$
$$m^{(4)} = (m+6)^{(4)i}$$

et generaliter

$$m^{(\mu)} = \left(m+\frac{\mu(\mu-1)}{2}\right)^{(\mu)i}$$

et viciſſim

$$m^{(\mu)i} = \left(m-\frac{\mu(\mu-1)}{2}\right)^{(\mu)}$$

Quoniam autem porro inuenimus eſſe:

$$(m+\mu)^{(\mu)i} = m^{(\mu)i} + m^{(\mu-1)i}$$

erit reductione ad caſum praeſentem facta:

$$\left(m-\frac{\mu(\mu-3)}{2}\right)^{(\mu)} = \left(m-\frac{\mu(\mu-1)}{2}\right)^{(\mu)} + \left(m-\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}\right)^{(\mu-1)}$$

ſeu commodius

$$m^{(\mu)} = (m-\mu)^{(\mu)} + (m-1)^{(\mu-1)}$$

ex qua proprietate etiam facile ſeries litterarum 𝔄, 𝔅, ℭ, etc. formabuntur, ſicque hoc alterum problema reſoluetur.

§. 35. Ad exemplum huius problematis quaeſtionem Vir Clar. affert, vt determinetur, quot variis modis numerus 50 in ſeptem omnino partes ſiue aequales ſiue inaequales diſpertiri queat. Haec ergo quaeſtio ad prius problema reducetur, ob $m=50$ et $\mu=7$, ſi quaeratur quot variis modis numerus $50+21$, ſeu numerus 71, in ſeptem partes inaequales partiri queat. Vtrumque autem fieri poſſe 8946 modis diuerſis. Praeterea vero hic idem numerus 8946 indicat (§. 28), quot variis modis $71-28=43$ per additionem produci queat ex his numeris 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Atque generaliter numerus modorum $m^{(\mu)}$, quibus numerus m in μ partes ſiue aequales ſiue in-

inaequales reſoluitur, ſimul oſtendit, quot variis modis numerus $m-\mu$ produci queat per additionem ex his numeris definitis

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ \mu.$$

§. 36. Finem huic diſſertationi faciat obſeruatio notatu digna, quam quidem rigore geometrico demoſtrare mihi nondum licuit. Obſeruaui ſcilicet hoc infinitorum factorum productum

$$(1-n)\ (1-n^2)\ (1-n^3)\ (1-n^4)\ (1-n^5)\ \text{etc.}$$

ſi per multiplicationem actu euoluatur, praebere hanc ſeriem:

$$1-n-n^2+n^5+n^7-n^{12}-n^{15}+n^{22}+n^{26}-n^{35}-n^{40}+n^{51}+\text{etc.}$$

vbi eae tantum ipſius n poteſtates occurrunt, quarum exponentes continentur hac forma: $\frac{3xx \pm x}{2}$. Ac ſi x ſit numerus impar, poteſtates ipſius n, quae ſunt $n^{\frac{3xx \pm x}{2}}$ coëfficientem habent -1; ſi autem x ſit numerus par, tum poteſtates $n^{\frac{3xx \pm x}{2}}$ coëfficientem habent $+1$.

§. 37. Praeterea notari meretur ſeries huius reciproca, quae oritur ex euolutione huius fractionis

$$\frac{1}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)(1-n^5)\ \text{etc.}}$$

prodibit ſcilicet iſta ſeries recurrens:

$$1+1n+2n^2+3n^3+5n^4+7n^5+11n^6+15n^7+22n^8+\text{etc.}$$

quippe quae per ſeriem ſuperioem

$$1-n-n^2+n^5+n^7-n^{12}-n^{15}+n^{22}+n^{26}-\text{etc.}$$

multiplicata producit vnitatem. In illa autem ſerie coëfficiens cuiusque poteſtatis ipſius n tot continet vnitates, quot variis modis exponens ipſius n in partes diſpertiri poteſt; ſic 5 ſeptem modis in partes reſolui poteſt, vti

$5 = 5$ | $5 = 3+2$ | $5 = 2+2+1$
$5 = 4+1$, | $5 = 3+1+1$ | $5 = 2+1+1+1$
$5 = 1+1+1+1+1$

nec numerus ſcilicet partium hic praeſcribitur nec inaequalitas.

DE MOTV MIXTO,
QVO CORPORA SPHAEROIDICA SVPER PLANO INCLINATO DESCENDVNT.

AVCTORE
DANIELE BERNOULLI.

Excerpt. ex Epiſtola data ad Georg. Wolffg. Krafft, Baſileae d. 15 Aprilis ſt. n. 1741.

§. 1.

Lemma

Tab. I. Fig. 1. Sit A E D F Circulus, cuius centrum B; ducatur Diameter AD et Tangens AG; ſit C centrum oſcillationis, quod circulo propoſito competeret, ſi ſuſpenderetur ex puncto A. Sit maſſa totius circuli $= M$, et putetur centrum grauitatis in ipſo centro circuli poſitum: tum concipiatur in A applicata potentia tangentialis expreſſa per AG; dico huius effectum fore vt ſequitur: 1.) Rotatio fiet, non in centro B, ſed in puncto C ſupra definito, quod adeo durante rotatione minima immotum manebit, dum punctum D progredietur verſus F, et punctum A verſus G. 2.) Deinde punctum A eam velocitatem acquiret a potentia AG, ac ſi circulus omni maſſa eſſet deſtitutus, et in puncto A maſſa eſſet concentrata, quae ſit $= \frac{BC}{AC} \times M$. Demonſtrationem huius propoſitionis colligere eſt ex propoſitione multo generaliori, quam demonſtraui in Diſſertatione: *De Motu corporum a percuſſione excentrica, &c.* §. 10.

§. 2.

§. 2. Sit iam planum inclinatum M P, ducatur verticalis Fig. 2.
MN, et horizontalis NP; ſit circulus AEDF ſuper plano MP, cuius maſſa rurſus $= M =$ BH verticali. Compleatur rectangulum ABLH: puncta B et C eadem ſint quae in ſuperiori paragrapho. Reſoluatur potentia BH (M) in BA et BL, eritque $BL = \frac{MN}{MP} \times M$. Hic vero iam patet, ſi omnis frictio abeſſet, centrumque B iam velocitatem v acquiſiuiſſe ponatur, fore $dv = \frac{MN}{MP} \times dt$ intelligendo per dt elementum temporis; deſignetur nunc frictio circuli per AG; haec faciet, vt punctum A retrorſum trahatur verſus M; deſignetur velocitas puncti A ratione huius motus per V, et erit (per Prop. praec.)
$$dV = \frac{AG \times dt}{\frac{BC}{AC} \times M} = \frac{AG \times AC \times dt}{BC \times M},$$ quia incrementum velocitatis habetur multiplicando potentiam per tempuſculum, et diuidendo per maſſam. Porro cum ratione huius motus punctum C quieſcat: erit velocitas centri B ratione motus poſterioris $= \frac{BC}{AC} \times V$, et velocitas abſoluta centri B, (quae ex vtroque motu compoſita oritur,) erit $= v - \frac{BC}{AC} \times V$. Sed ex aequatione differentiali $dv = \frac{MN}{MP} \times dt$ ſequitur $v = \frac{MN}{MP} \times t$, et ex altera aequatione differentiali, (ſi modo frictio conſtanter eadem ſit, vti poni ſolet) fluit $V = \frac{AG \times AC}{BC \times M} \times t$. Eſt igitur velocitas abſoluta centri $B = \left(\frac{MN}{MP} - \frac{AG}{M}\right) \times t$.

§ 3. Atque ſic iam recte determinatum puto motum centri: ſupereſt vt etiam definiatur motus angularis circa centrum. Vidimus autem frictionem facere $V = \frac{AG \times AC}{BC \times M} \times t$; ab hac velocitate ſubtrahenda eſt velocitas

centri

centri B, quae pariter a frictione oritur, nempe $\frac{AG}{M}\times t$, eritque reſiduum $\frac{AG\times AC}{BC\times M}\times t - \frac{AG}{M}\times t$, ſeu $\frac{AG\times AB}{BC\times M}\times t$, velocitas angularis, qua quoduis peripheriae punctum circa centrum B rotatur verſus M, dum ipſum centrum deſcendit velocitate abſoluta $[\frac{MN}{MP} - \frac{AG}{M}]\times t$.

§. 4. Corollarium 1. Ex formulis, quas pro vtriusque motus velocitatibus dedimus, ſequitur vtrumque motum vniformiter accelerari, ſicut corpora libere cadentia; et erit quidem velocitas angularis puncti in peripheria ſimti ad velocitatem abſolutam centri, vt $\frac{AG\times AB}{BC\times M}$ ad $\frac{MN}{MP} - \frac{AG}{M}$; ſiue (ponendo BH loco maſſae M,) vt $\frac{AG\times AB}{BC\times BH}$ ad $\frac{MN}{MP} - \frac{AG}{BH}$.

§. 5. Coroll. 2. Si frictio horizontalis corporis deſignetur per m, dum maſſa corporis M expreſſa fuit per BH, erit $AG = \frac{NP}{MP}\times m$; hisque valoribus ſubſtitutis pro AG et BH, erunt praefatae velocitates in ratione vt $NP\times AB\times m$ ad $MN\times BC\times M - NP\times BC\times m$; ergo rotatio nulla erit, ſi frictio ſit nulla, aut ſi planum ſit verticale.

§. 6. Coroll. 3. In rotatione perfecta, in qua ſcilicet motus reptorius nullus eſt, fit velocitas angularis aequalis velocitati abſolutae centri, atque adeo oportet in hoc caſu vt ſit $NP\times AB\times m = MN\times BC\times M - NP\times BC\times m$, ſiue $NP\times AC\times m = MN\times BC\times M$, ſeu $m = \frac{MN\times BC}{NP\times AC}\times M$. Igitur, poſita frictione horizontali $= \frac{MN\times BC}{MP\times AC}\times M$, corpus perfecte rotabitur; et ſi fuerit praefata frictio maior quam $\frac{MN\times BC}{NP\times AC}\times M$, corpus adhuedum perfecte rotabitur, nec aliter mouebitur, quam ſi huic quantitati frictio eſſet aequalis, quod probe notandum eſt in aequationibus quas de-

dedimus pro vtraque velocitate; hae ſcilicet aequationes non valent niſi cum frictio horizontalis eſt aut aequalis, aut minor, quantitate $\frac{MN \times BC}{NP \times AC} \times M$. Solutio huius paradoxi ex eo eſt petenda, quod frictio nulla fingi poteſt, vbi nullus eſt motus reptorius; et motus reptorius demum adeſſe incipit vbi frictio horizontalis incipit eſſe minor quantitate $\frac{MN \times BC}{NP \times AC} \times M$.

§. 7. Ecce iam phaenomena omnia, quae ad experimenta reuocari poſſunt facile, et quae, vt inſtituas, rogo. Inquiratur primo frictio horizontalis accurate, quantum fieri poteſt; fiat ſtatim inclinatio plani valde parua, et obſeruabitur corpus perfecte rotari; deinde ſenſim magis inclinetur planum, et adhucdum corpus perfecte rotari obſeruabitur, resque perinde ſe habebit, donec fiat $m = \frac{MN \times BC}{NP \times AC} \times M$, aut donec fiat $\frac{MN}{NP} = \frac{AC}{BC} \times \frac{m}{M}$, qui erit vltimus perfectae rotationis limes, quique probe ad experimenta erit reuocandus, vt appareat, an cum theoria conueniat. Haec dum ita ſunt, frictio nihil de Vi viua demit, et motus plane eodem modo fiet ac ſi planum eſſet perfecte politum pariter atque ſuperficies corporis, haec vero filum haberet circumuolutum ordine literarum E, D, F, A, cuius extremitas plano ſit affixa, quem motum Pater meus definiuit in *Commentarior. Tomo II. pag.* 203.

§. 8. Iam vero magis eleuari planum ponamus, ita vt nunc ſit $\frac{MN}{NP}$ maior quam $\frac{AC}{BC} \times \frac{m}{M}$; dico motum fore compoſitum ex reptorio et rotatorio, et vtrumque recte per aequationes noſtras definitum eſſe puto. Hac de re experimenta hunc in modum inſtitui poterunt. Fuerit MP

aequalis peripheriae circuli, et tangat ab initio circulus planum in puncto M, ſitque aliquod obſtaculum, quod circulum in ſitu ſuo retineat, quum iam tangit punctum P. Notentur probe in peripheria circuli puncta contactus cum punctis M et P; puta haec puncta poſita in E et Q; ſic patet fore arcum EAFQ menſuram motus rotatorii, peripheriam integram vero menſuram motus centri B, quando quidem vi formularum noſtrarum hi duo motus perpetuo eandem inter ſe rationem ſeruant. Si autem theoria noſtra recte ſe habet, oportet vt ſit arcus EAFQ ad peripheriam circuli vt $NP \times AB \times m$ ad $NN \times BC \times M - NP \times BC \times m$. Hoc ſolo experimento conficientur omnia. Si vero circulus ſemper perfecte rotaretur, oporteret vt arcus EAFQ ſemper totam peripheriam exhauriret, quod certiſſime non erit. Equidem non crediderim experimenta accuratiſſime theoriam confirmatum iri, ob multas rationes, quas breuitatis cauſa taceo: conſenſum tamen non mediocrem expecto.

§. 9. Monui ſupra, nihil de Vi viua perdi, quamdiu corpus perfecte rotetur: at vero, cum motus mixtus eſt, aliquid de Vi viua perit, quia ſcilicet frictio tunc nonſolum *potentialiter*, ſed et *actualiter*, adeſt. Id interim paradoxum prima fronte apparet, quod fieri poſſit, vt aucta frictione nihil de Vi viua pereat, dum aliquid perit manente frictione.

§. 10. Poteſt corporibus ſphaeroidicis, quae conſiderauimus, ſubſtitui corpus quodcunque, modo pars illa corporis, quae plano eſt contigua, cylindrica ſit, vt ſic motus vniformis fiat. Centrum tamen grauitatis totius corporis ſemper eſſe debet in axe cylindri ſuper plano deſcen-

deſcendentis, atque punctum C ſemper ſignificabit centrum oſcillationis corporis ex puncto A ſuſpenſi.

§. 11. Deſcendamus nunc ad exempla quaedam particulariora. 1. Si pro corpore ſumatur ſuperficies cylindrica, fiat BC = radio AB, eritque velocitas rotatoria, ad velocitatem abſolutam centri, vt $NP \times m$ ad $MN \times M - NP \times m$, neque prius motum deſcendendo acquiret reptorium, quam $\frac{MN}{NP}$ fuerit maior quantitate $\frac{2m}{M}$. 2. Si ſumatur corpus cylindricum, fiet BC = dimidio radio AB; tumque erit velocitas, qua punctum in ſupeficie circa axem rotatur, ad velocitatem qua axis deſcendit, vt $2NP \times m$ ad $MN \times M - NPm$, iamque motus reptorius aderit, cum ſit $\frac{MN}{NP}$ maior quantitate $\frac{3m}{M}$; igitur difficilius motum reptorium acquirit, ceteris paribus, corpus cylindricum, quam cortex cylindricus. 3. Si accipiatur corpus ſphaericum, fit $BC = \frac{2}{5}AB$, eruntque praefatae velocitates in ratione $5NP \times m$ ad $2MN \times M - 2NP \times m$, requiriturque ad motum reptorium vt ſit $\frac{MN}{NP}$ maior quantitate $\frac{7m}{2M}$. Notari etiam poteſt, quodſi BC ſit admodum parua, quod fit cum materia corporis non eſt homogenea, ſed fere tota circa axem concentrata, corpus difficillime motum reptorium acquirat, ita vt planum fere in ſitum verticalem eleuari poſſit, priusquam id fiat.

ADDITAMENTVM DISSERTATIONIS PRAECEDENTIS, DE CORPORVM PLANO IMPOSITORVM DESCENSV:

AVCTORE
G. W. Krafft.

§. 1.

Vt haec Theoria conuolutionis corporum ſuper plano inclinato rectius intelligatur, et vlterius luce perfundatur ſua: operae praetium omnino erit ad haec ſequentia attendere, quorum mentio in praecedentibus aut plane nulla, aut minus diſtincta, facta eſt. Primo omni cura diſcernenda eſt Rotatio, corporis alicuius deſcendentis in plano inclinato, *Continua*, ab illa, quam *Inchoatam* tantum dico. Illa adeſt, ſi durante toto corporis deſcenſu ſemper diuerſa puncta corporis cum plano congruunt; adeoque obtinet, et corpus vertit, quamdiu hoc deſcendit: haec vero datur, cum corpus in primo motus ſui initio rotatorium motum inchoat quidem, at continuare eum nequit, ob impedimentum aliquod obortum, vnde accidit, vt corpus tale prolabatur tantum, et reliquum poſtea viae motu reptorio abſoluat; quae poſterior Rotatio inchoata *Simplex procidentia* corporis vocari poteſt. Veluti ſi ex. gr. plano inclinato ABD
Tab. I. Fig. 3. ſemicirculus FLH ſitu valde obliquo inſiſtat, vt ex centro grauitatis C perpendicularis CE, demiſſa in planum DB, cadat extra F verſus B; patet ex diſſertationis meae praecedentis §. 8. futurum eſſe, vt ſemicirculus ita

ita poſitus rotetur; at haec rotatio non erit continua, ſed inchoata tantum, aut vero ſimplex procidentia, qua abſoluta idem ſemicirculus acquiret ſitum FNM, ex cuius natura deinde denuo iudicandum erit per leges indicatas, an rotando, vel rependo, reliquum viae ſit abſoluturus.

§. 2 Secundo, ſi rotatio fuerit continua: erit ea iterum pro varia plani inclinatione, et diuerſa corporis natura, vel rotatio *perfecta* vel tantum *mixta*. Illa eſt, quando durante toto deſcenſu, poſt ſingula momenta temporis, nouo elemento plani nouum elementum corporis deſcendentis contiguum fit; haec vero, quando contrarium accidit. Igitur in omni rotatione corporis peripheria circulari dotati, duplex adeſt motus, *Progreſſiuus* vnus, quo centrum iuxta directionem plani deſcendit; alter *Rotatorius*, ſiue *Angularis*, quo quodlibet peripheriae punctum circa centrum fertur. Sin itaque accidat, vt motus progreſſiuus ſit aequalis angulari: tum rotatio eſt perfecta; ſi vero progreſſiuus ſit maior: tunc adeſt motus rotatorius *retardatus*; ſi progreſſiuus ſit minor: exiſtit motus rotatorius *acceleratus*; quorum duorum poſteriorum vterque eſt rotatorius mixtus.

§. 3. Attendit ad hoc rotationis diſcrimen Celeber. *Bernoullius*, in praecedentis Diſſertationis ſuae §. 6. deditque regulas, ex theoria ibidem ſtabilita deductas, quarum ope vnum rotationis caſum ab altero diſtinguere licet a priori quam facillime. Cum quibus plane conſentiunt, quae Celeberr. *Eulerus* mecum de hac re communicauit, cuius verba huc redeunt: „Motus cylindri ABD Fig. 4.
„ex materia homogenea confecti, ſuper plano inclinato

„FH erit quidem rotatorius, verum tamen plerumque „mixtus ex repente motu et rotante; donec ſi planum „FH fiat verticale, motus rotatorius omnino euaneſcat, „atque cylindrus ſolo motu reptorio deſcendat. Fieri ta„men poteſt, vt motus cylindri ſit rotatorius tantum, „motusque reptorius prorſus euaneſcat; id quod diiudicabi„tur ex hac regula: Sit frictio horizontalis ſuper plano „FH = ponderi f, ſit porro pondus cylindri proprium „$= p$; dico, ſi fuerit $\frac{FG}{GH} > \frac{3f}{p}$, rotationem cylindri fore „perfectam, motumque ab omni reptione liberum. Sin „autem loco cylindri quaeſtio formetur de globo, tum „globi motus perfecte erit rotatorius, ſi fuerit $\frac{FG}{GH} < \frac{7f}{2p}$. Qui valores ſtatim ex *Bernoullianis* fluunt, ſi conſideretur, poſito puncto ſuſpenſionis in A, et centro oſcillationis in E, eſſe in circulo, ſeu cylindro, AE $= \frac{3}{2}$AC; in ſphaera autem eſſe idem AE $= \frac{7}{5}$ AC.

§. 4. Experimentis itaque limitem hunc rotationis perfectae, et mixtae, explorare ſtudui, et quantum haec perficere potui, inueni conſenſum cum natura optimum; ſed dolui me tum temporis experimenta eouſque extendere non potuiſſe, vt motum mixtum prodire cernerem. Die enim 9 Iunii huius anni 1741, ad vſum vocaui aſſerem abietinum, optime dedolatum, 9 pedes longum, quem ſucceſſiue ad varias altitudines eleuaui, vt totidem planorum inclinatorum vices ſubiret. Huic impoſui diſcum pariter abietinum, cuius peripheria erat exacte 22 poll. Londinenſ. craſſities 1 $\frac{1}{16}$ poll. pondus proprium 5343 gran. quorum 7680 efficiunt libram Amſtelodamenſem. Frictio horizontalis, in loco aliquo ſcabritiei mediae, 1833 gran. Tum in plano inclinato dimen-

dimenſus ſum longitudinem periphaeriae diſci triplam, hoc eſt 66. poll. vt eo exactius perſpicere poſſim an punctum in diſco notatum metam, linea tranſuerſa ſignatam, egrederetur, vel accurate attingeret, vel ſecus faceret. Ab eleuatione igitur plani 3° vſque ad 21° ſumma cura nihil aliud animaduertere potui, quam punctum in diſco notatum, et ſuperiori prius lineae transuerſae plani inclinati impoſitum, poſt tres circumuolutiones peractas, et abſolutum ſpatium 66 poll. praeciſe adhuc inferiori lineae transuerſae inſediſſe, atque ſic in omnibus his inclinationibus plani motu rotatorio perfecto deſcendiſſe. Cum vero in maioribus inclinationibus tentare idem cuperem, parem ſucceſſum obtinere non potui, ob celeritatem diſci deſcendentis nimis magnam, et incurſum in obſtaculum oppoſitum nimis violentum, quo factum eſt, vt diſcus ſemper reſiliret, obſeruationesque turbaret, cui malo remedium afferre non potui. Calculo deinde facto, ad quamnam altitudinem eleuandum eſſet hoc planum, vt motus mixtus incipiat ſenſibilis reddi: inueni eam 48 poll. ſiue 4 pedibus, minorem eſſe non poſſe, et conſequenter angulum inclinationis requiri circiter 50 graduum, in quo, ob nimium diſci deſcendentis impetum, exacte nihil definiri potuiſſet. Sed cum primi hi euentus Theoriam perfecte confirment: fateor, de reliquis me ita certum eſſe, vt de experimento, et machina, emendandis vix ſim ſollicitus.

§. 5. Cum itaque in motu rotatorio perfecto punctum peripheriae circularis quodlibet deſcribat Cycloidem ordinariam, deſcribet tale punctum in motu mixto *Cycloidem protractam*, cuius aequatio ſequenti modo eruitur.

Pono

Fig. 5. Pono ſemicirculum A B D progredi voluendo aequabiliter motu mixto, atque ſic punctum A deſcribere Cycloidem protractam A M c, dum deſcripſiſſet Cycloidem ordinariam A N C, ſi motu rotatorio perfecto moueretur. Quia igitur punctum A promouetur per C c (a) quo tempore percurrit arcum A N C (2), poſita diametro A D $=1$, promouebitur per N M ($a\sqrt{x}$), quo tempore percurrit arcum A N; ponendo A P $=x$, et P M $=y$. Erit igitur, ex natura Cycloidis ordinariae, y − N M − P B $=$ B N $=$ arcui circulari A B, vnde oritur aequatio ad Cycloidem protractam A M c, haec $dy = \frac{(a+2\sqrt{1-x})dx}{2\sqrt{x}}$.

§. 6. Sequitur denique, ex formulis in Diſſertationis meae §. 8. allegatis, Rotationem nullam eſſe, et conſequenter Reptionem obtinere, ſi aut frictio ſit nulla, aut planum fiat verticale. Nam ſi frictio ſit nulla, aderit reptio, quia $0 < \frac{EF}{CE} \times P$, niſi E F ſimul ſit negatiua quo caſu ſimplex procidentia locum habet, et poſt hanc factam reliquus motus denuo his regulis examinari debet, qualis ſit futurus. Si vero planum ſit verticale: facile patet, corpus iuxta illud delabens nulla frictione affici, ſed celeritate vniformiter accelerata, et naturali, deſcendere, ſine vllo frictionis impedimento; quare hic caſus cum priori coincidit.

DE

DE VIBRATIONIBVS ET SONO LAMINARVM ELASTICARVM

Commentationes Phyſico - Geometricae.

A. DANIELE BERNOVLLI.

I. De Vibrationibus

§. 1.

Tot cuiuis quotidie occurrunt oſcillationum quas hic examinare conſtitui, exempla, vt fere mirari poſſimus, neminem adhuc auſam inde arripuiſſe vt Galileus quondam ab lampade ſuſpenſa oſcillationes pendulorum, iſtud argumenti genus ſecundum leges mechanicas disquirendi, praeſertim cum iam eousque mechanica ſublimior prouecta ſit, vt pauca tentare non audeat. Equidem anni ſunt complures, quo id negotii in me ſuſcepi optatiſſimoque ſucceſſu abſolui inuentorumque ſummam Cel. Eulero duobus indicaui verbis; verum non licuit tunc ſingula in ordinem redigere atque cum Academia communicare, nolui tamen id vlterius differre, ſpe fretus priſtinas haſce lucubrationes meas nec Academiae ingratas nec publico plane inutiles fore.

§. 2. Argumentum noſtrum multis quaeſtionibus fertiliſſimum eſt non inelegantibus; quia vero vna eademque methodus omnibus ſufficit, non puto ſingulas eſſe pertractandas; problematum nimia extenſio (quam multi tantopere amant) plerumque argumenti elegantiae non parum derogat, nec rei ipſi quicquam ponderis addit,

quin ſaepius neſcio quid ridiculi inſpergit; nemo igitur vitio vertat, cum laminas tantum conſiderabo naturaliter rectas easque per totam ſuam longitudinem vniformiter craſſas atque elaſticas. Eadem ratione inductus nolui rationem habere virium acceleratricium, quae a partium grauitate oriuntur, quam prae vi elaſticitatis veluti infinite paruam hic cenſemus; hunc in finem laminas conſiderabo horizontaliter poſitas ſolaque elaſticitate ſua vibratas: hypotheſes haſce calculi facilitandi cauſa vnice inſtituam, nec enim methodus in quaeſtionibus magis intricatis deficeret.

Tab. II. Fig. 1. §. 3. Sit igitur murus verticalis AC cui perpendiculariter infixa putetur lamina elaſtica recta BD, tota ſua longitudine plane vniformis: ponatur lamina oſcilationes perficere minimas atque oſcillando aſſumere figuram BE; erit nobis ante omnia iſta figura determinanda: hunc in finem notabimus ſtatim, laminam inter oſcillandum in omni ſitu ſimilem curuaturam affectare, quia diſtantiae ſingulorum punctorum ab axe BD eam quam ſemel inter ſe habent rationem perpetuo ſeruant, quod iam diu de oſcillationibus vniformibus demonſtratum fuit: vnde conſequens eſt, curuaturam laminae in quouis ſitu innoteſcere, cum eſt in ſitu vnico determinata: conſiderabimus igitur ſitum laminae extremum, ceu in quo ad temporis punctum quieſcit. Sit itaque BGE ſitus laminae extremus: efficiet tunc laminae elaſticitas, vt quodvis elementum Gg ſollicitetur verſus BD, et ita quidem vt vis accelerans ſit proportionalis elementi Gg diſtantiae a linea BD, ſicut iſochronimus poſtulat: hinc ſequitur, ſi ſingula elementa Gg in partem contrariam trahantur

hantur eadem vi qua verſus BD ſollicitantur, ſic fore, vt lamina in ſtatu curuaturae BGE ſit perſeueratura: hinc apparet curuam BGE nouam conſtituere elaſticae ſpeciem, quae nempe oritur, cum cuiuis puncto G potentia applicatur extrorſum trahens, quae diſtantiae eiusdem puncti ab axe ſit proportionalis: ſufficit haec conſideratio ad genus curuae determinandum: quia vero ad inſtitutum noſtrum omnia *ſpecifice* determinare oportet, hae quoque potentiae recte erunt determinandae. Sit vis grauitatis $= g$: vis, quae ſingula puncta elementi vltimi in E extrorſum trahit, $= G$, poteritque curuatura BGE determinari vt ſequitur.

§. 4. Sint puncta G, g, I, i et E in ſitu laminae incuruatae eadem quae puncta F, f, H, h, D in ſitu laminae rectae ducanturque rectae minimae FG, fg, HI, hi et DE, quae ſingulae poterunt cenſeri ad axem BD perpendiculares, ponanturque puncta F et f infinite propinqua, ſitque $Df = x$; $fF = dx$, ſitque elementum dx conſtantis vbique magnitudinis; ponantur inſuper rectae hi et HI tranſire per centra grauitatis ſpatiorum $EDfg$ et EDFG, tumque ponatur $Dh = \xi$ et $hH = d\xi$: Denique fiat $ED = c$; $gf = y$; $GF = y - dy$. His ita poſitis, erit potentia elementum Gg extrorſum trahens $= \frac{y}{c} \times G \times dx$ et potentiae omnes arcui EG applicatae erunt $= \frac{G}{c} \int y\,dx$ atque ſic proportionales ſpatio EDFG: iſtas vero potentias conſiderare licet tanquam vnitas in puncto I, cum quaeſtio eſt de determinanda curuatura in puncto G ſeu inclinatione duorum elementorum contiguorum: hanc curuaturam exprimemus per angulum contactus, qui ob paruitatem infinitam applicatae y poni poteſt ſimpli-

citer $= \frac{ddy}{dx}$; atque iſte angulus contactus faciendus eſt ſecundum hyppotheſin communem proportionalis momento potentiarum omnium arcui GE applicatarum, id eſt ſummae potentiarum $(\frac{G}{c}\int y\,dx)$ multiplicatae per GI ſeu FH$(x-\xi)$ tanquam per vectem. Inde oritur ſequens aequatio.

$$\frac{ddy}{dy} = \frac{dx}{m^4} \times (x-\xi) \times \frac{G}{c}\int y\,dx,$$

vbi per $\frac{dx}{m^4}$ intelligitur quantitas conſtans, quae vtrumque aequationis membrum homogeneum reddit, et quae a virtute elaſtica pendet: docebimus autem in ſequentibus, quemadmodum quantitas m^4 pro quauis lamina facili experimento explorari atque determinari poſſit, in qua diſquiſitione non minimum rei momentum poſitum eſt, quia alias numerus verus vibrationum dato tempori reſpondens definiri nequit. Nunc vero vlterius pergimus. Differentietur itaque praemiſſa aequatio et erit

$$\frac{m^4 d^2y}{dx^2} = \frac{G\,dx}{c}\int y\,dx + \frac{G}{c}xy\,dx - \frac{G\,d\xi}{c}\int y\,dx - \frac{G}{c}\xi y\,dx$$

Supereſt vt variabiles incognitas ξ et $d\xi$ ex iſta aequatione eliminemus: hunc in finem notabimus, quod in mechanicis demonſtratum eſt, eſſe ſpatiolum HFfg multiplicatum per FH aequale ſpatio GFDE multiplicato per Hh, id eſt, $y\,dx \times (x-\xi) = d\xi\int y\,dx$, vnde ſequitur

$$\frac{G}{c}xy\,dx - \frac{G}{c}\xi y\,dx - \frac{G\,d\xi}{c}\int y\,dx = 0;$$

poſſunt itaque in priori aequatione tres vltimi termini deleri, hocque facto oritur $\frac{m^4 d^3y}{dx^2} = \frac{G\,dx}{c}\int y\,dx$, quae iterum differentiata tandem dat vltimam aequationem deſideratam, nempe $d^4y = \frac{G}{m^4 c} y\,dx^4$.

§. 5. Priusquam oſtendam, quomodo haec aequatio pertractanda et ad inſtitutum noſtrum applicanda ſit, indicabo viam, qua iamiam longitudo penduli ſimplicis iſo-

iſochroni cum vibrationibus laminae inueniri poſſit. Eſt nimirum potentia elemento Gg applicata $= \frac{y}{c} \times G\,dx$, ponduſculum autem eiusdem elementi eſt $= g\,dx$: ſi iam fingatur ſubito euaneſcere omnes potentias laminam extrorſum trahentes, erit vtique vis elementum Gg in ſitum Ff reſtituens $= \frac{y}{c} \times G\,dx$, quae ſi diuidatur per ponduſculum ſeu maſſulam elementi, id eſt, per $g\,dx$, habebitur vis accelerans huius elementi, quae proinde erit $= \frac{Gy}{gc}$: vnde ſi longitudo quaeſita penduli iſochroni ſimplicis dicatur L, ponaturque huius penduli diſtantia a linea verticali pariter $= GF = y$, oportet vt vtrobique vires accelerantes ſint inter ſe aequales: eſt autem tunc vis pendulum ſimplex accelerans $= \frac{y}{L}$: ergo habetur $\frac{Gy}{gc} = \frac{y}{L}$, ſeu $L = \frac{gc}{G}$.

§. 6. Haec iam ſufficerent ad plures proprietates, quibus oſcillationes iſtae gaudent, determinandas, verum omnia erui nequeunt, niſi prius aequatio pro curua ad quantitates finitas fuerit reducta, ſimulque vis elaſticitatis *abſoluta* experimento fuerit explorata: In hoc momentum rei totum poſitum eſt: Incipiam ab aequationis, quae quidem quarti ordinis eſt, reductione ad quantitates finitas: nec enim poteſt aequatio noſtra generaliſſima ad quosuis caſus particulares applicari, niſi cognitis prius quantitatibus conſtantibus, quae poſt quamuis integrationem adiiciuntur: praeuia igitur aequationis reductione ad quantitates finitas omnino opus eſt. Duplex autem mihi modus eſt hancce iſtituendi reductionem: alter per ſeries, quem ob calculi commoditatem fere praefero, alter pure geometricus, qui in integratione abſoluta conſiſtit. Reductionem hanc po-

ſteriorem nequidem tentaturus fuiſſem, niſi prius a perſpicaciſſimo Eulero intellexiſſem, quod eam in poteſtate habeat. Modum vtrumque apponam, cum vterque ſua ſecum ferat commoda.

§. 7. Ponatur breuitatis ergo $\frac{G}{m^4 c} = \frac{1}{f^4}$, isque valor ſubſtituatur in aequatione $d^4 y = \frac{G\,y\,d\,x^4}{m^4\,c}$; ſic erit $d^4 y = \frac{y\,d\,x^4}{f^4}$: Dico autem, ſi in *abſtracto* aequatio iſta conſideretur, fore

$$y = \begin{cases} \alpha\left(1 + \frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\,f^4} + \frac{x^8}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\,f^8} + \text{etc.}\right) \\ + \beta\left(\frac{x}{f} + \frac{x^5}{3\cdot4\cdot5\cdot f^5} + \frac{x^9}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\,f^9} + \text{etc.}\right) \\ + \gamma\left(\frac{xx}{ff} + \frac{x^6}{3\cdot4\cdot5\cdot6\,f^6} + \frac{x^{10}}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\,f^{10}} + \text{etc.}\right) \\ + \delta\left(\frac{x^3}{f^3} + \frac{x^7}{4\cdot5\cdot6\cdot7\,f^7} + \frac{x^{11}}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\,f^{11}} + \text{etc.}\right) \end{cases}$$

vbi per α, β, γ, δ quatuor intelliguntur conſtantes arbitrariae, quarum ope aequatio generaliſſima, cuiuis caſui propoſito accommodari poteſt, vt et cuiuis oſcillationum generi; poſſunt enim oſcillationes varii generis inſtitui: Nunc autem applicabimus aequationem hoc modo integratam ad oſcillationes ſimpliciſſimas, quas ipſa figura prima repraeſentat, idque ſequentem in modum.

Ex natura problematis et ex methodo §. 4. expoſita ſequitur, quod poſita Df ſeu $x = 0$, fit $\frac{d\,d\,y}{d\,x} = 0$, ſimulque $\frac{d^3 y}{d\,x^3} = 0$, quia quantitas $\frac{d^3 y}{d\,x^3}$ proportionalis eſt ſpatio E G F D; vnde iam concludo, faciendam eſſe $\gamma = 0$ et $\delta = 0$: praeterea poſita $x = 0$, fit $y =$ D E $= c$ et conſequenter $\alpha = c$: ſubſtitutis itaque in aequatione generali praedictis valoribus pro γ, δ et α, habebimus iam talem aequationem

$y =$

$$y = \begin{cases} c\left(1 + \frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\,f^4} + \frac{x^8}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\,f^8} + \text{etc.}\right) \\ + \mathfrak{B}\left(\frac{x}{f} + \frac{x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\,f^5} + \frac{x^9}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\,f^9} + \text{etc.}\right) \end{cases}$$

in qua ſupereſt determinandus valor conſtantis quantitatis $\mathfrak{B}$: hunc in finem notabimus, quod facta $x = DB = l$, fiat $y = 0$, ex quo ſequitur.

$$\mathfrak{B} = -c\times\left(1 + \frac{l^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\,f^4} + \frac{l^8}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\,f^8} + \text{etc.}\right) :$$
$$\left(\frac{l}{f} + \frac{l^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\,f^5} + \frac{l^9}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\,f^9} + \text{etc.}\right)$$

Denique faciendum eſt, vt ipſa quoque quantitas f eliminetur: id vero efficitur eo, quod poſita rurſus $x = DB = l$, fit $dy = 0$; hinc ſcilicet fit

$$\mathfrak{B} = -c\times\left(\frac{l^3}{1\cdot2\cdot3\,f^3} + \frac{l^7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\,f^7} + \text{etc.}\right) :$$
$$\left(1 + \frac{l^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\,f^4} + \frac{l^8}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\,f^8} + \text{etc.}\right)$$

Quod ſi itaque ambae aequationes inter ſe comparentur, noua inde orietur, cuius ope littera f determinari poterit per methodum conſuetam approximationum; erit nimirum

$$\left(1 + \frac{l^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\,f^4} + \frac{l^8}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\,f^8} + \text{etc.}\right) :$$
$$\left(1 + \frac{l^4}{2\cdot3\cdot4\cdot5\,f^4} + \frac{l^8}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\,f^8} + \text{etc.}\right) =$$
$$\left(\frac{l^4}{2\cdot3\cdot4\,f^4} + \frac{l^8}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\,f^8} + \frac{l^{12}}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\,f^{12}} + \text{etc.}\right) :$$
$$\left(1 + \frac{l^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\,f^4} + \frac{l^8}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\,f^8} + \text{etc.}\right),$$

ſiue proxime $1 - \frac{l^4}{12\,f^4} + \frac{l^8}{5040\,f^8} = 0$ aut rurſus proxime $f^4 = \frac{4}{49}\,l^4$ atque adeo $f = l\sqrt{\frac{2}{7}}$. Sic igitur omnes quantitates arbitrariae iam ſunt determinatae ſimulque curua omni qua lubet accuratione deſcripta. Progrediamur nunc ad longitudinem penduli iſochroni determinandam, qui ſcopus noſter eſt praecipuus.

§. 8

§. 8. Indicauimus in fine paragraphi quinti eſſe longitudinem penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{gc}{G}$: poſuimus autem ab initio paragraphi ſeptimi breuitatis ergo $\frac{G}{m^4 c} = \frac{1}{f^4}$; eſt igitur praefata longitudo $\frac{gc}{G} = \frac{gf^4}{m^4} =$ (ſubſtituto pro f^4 valore in fine ſuperioris paragraphi inuento) $\frac{4 l^4 g}{49 m^4}$, quae proinde quantitas exprimit quaeſitam penduli longitudinem: quantitas autem m^4 definienda eſt ab elaſticitate laminae, quae proinde experimento ſpraeuio exploranda eſt, iſtudque negotium hunc in modum expediri poterit.

§. 9. Laminam BD, cuius vibrationes ſunt determinandae, verticaliter infixi lacunari horizontali, ne ſcilicet lamina proprio ſe incuruaret pondere: Extremitati pondus P appendi, vt oſtendit figura ſecunda, quod mediante trochlea R et funiculo ERP laminam horizontaliter tendens eandem incuruabat in ſitum BGE: tumque diſtantiae DE menſuram exacte accipiebam; hanc diſtantiam, quae experimento cognoſci poteſt, vocabo C. Reliquae experimenti hypotheſes figuraeque denominationes analogae ſunt cum iis, quibus in figura prima vſi ſumus, praeſertim reſpectu paruitatis veluti infinitae applicatarum FG. Si vero mutatis mutandis idem hic fiat raciocinium, quod §. 4. fecimus, pro curuatura laminae determinanda, reperietur, quod nemini difficile erit, talis aequatio ad curuam

$$\frac{ddy}{dx} = P \times x \times \frac{dx}{m^4}$$

in qua, vt ſupra §. 4, denotat $\frac{ddy}{dx}$ angulum contactus in G; et P eſt potentia, quae hic tota puncto extremo E applicata eſt: x denotat abſciſſam Df, quae ratione puncti

puncti *g* vectis eſt ac denique $\frac{dx}{m^4}$ eſt conſtans, quae eadem eſt vt §. 4, quia in vtroque problemate de vna eademque lamina ſermo eſt: iſta vero aequatio, ſi cum additione debitarum conſtantium integretur facit.

$$y = C - \frac{P\,l\,l\,x}{2\,m^4} + \frac{P\,x^3}{6\,m^4}$$

Conſtantes addendae reperiuntur ex eo quod poſita $x = DB = l$ fiat $dy = 0$, tum quod facta $x = 0$ ſit $y = DE = C$. Videmus autem praeterea quod facta $x = l$ ſit $y = 0$ atque adeo $C - \frac{P\,l^3}{3\,m^4} = 0$ ſiue

$$m^4 = \frac{P\,l^3}{3\,C}.$$

Atque ſic iam attigimus ſcopum noſtrum, qui fuit experimento explorare, valorem ſubſtituendum quo quantitate m^4 in formula $\frac{4\,l^4\,g}{49\,m^4}$ quaeſitam penduli longitudinem exprimente, quae adeoque longitudo iam fit $= \frac{12\,g\,l\,C}{49\,P}$; exprimit autem $g\,l$ pondus totius laminae DB, quod proinde ſi indicetur littera p et dicatur longitudo quaeſita penduli cum vibrationibus laminae iſochroni L, erit tandem

$$L = \frac{12\,p}{49\,P}\,C.$$

§. 10. Priusquam inuentorum vſum faciam, paucis indicabo verbis methodum alteram, quam habeo, aequationem differentialem quarti ordinis (§. 4.) $d^4y = \frac{G}{m^4 c}\,y\,dx^4$ ſiue abbreuiatam $d^4y = \frac{y\,dx^4}{f^4}$ pertractandi problematisque noſtris applicandi. Sit igitur *e* numerus cuius logarithmus hyperbolicus eſt vnitas, ſintque *a*, *b*, *h* et *n* quantitates conſtantes arbitrariae, dico praefatae aequationi $d^4y = \frac{y\,dx^4}{f^4}$ conuenire eamque pleniſſime exhaurire hanc, quae puris quantitatibus finitis expreſſa eſt, nempe

$$y = a e^{\frac{x}{f}} + b e^{\frac{-x}{f}} + h \, Sin. \, Arc. \left(\frac{x}{f} + n \right)$$

in qua *Sin. Arc.* $\left(\frac{x}{f} + n \right)$ indicat ſinum arcus $\left(\frac{x}{f} + n \right)$ in circulo, cuius radius ponitur aequalis vnitati; Huiusmodi aequationum methodum generalem alibi expoſui nulliusque dubito quin etiam ſuam cum publico communicauerit Cel. Eulerus. Iam vero ſi rurſus conditionibus §. 7. ſatisfiat, reperientur re recte pertractata ſequentes valores pro arbitrariis conſtantibus aſſumtis a, b, h, et n, ſcilicet

$$a = \frac{c}{2 + 2e^{l:f}} \text{ atque } b = \frac{e^{l:f} c}{2 + 2e^{l:f}}, \text{ tum}$$

$$h = \frac{c \sqrt{(2 + 2e^{2l:f})}}{2 + 2e^{l:f}} \text{ ac denique } n = Arc. \, Sin. \frac{1 + e^{l:f}}{\sqrt{(2 + 2e^{2l:f})}}$$

valor autem quantitatis f reperietur, ſi ſatisfiat huic aequationi

$$\frac{l}{f} = 2 \; Arc. \; Sin. \frac{1 + e^{l:f}}{\sqrt{(2 + 2e^{2l:f})}}$$

ad cuius aequationis radicem proxime inueniendam methodus adhiberi poteſt, quam tradidi in Comment. Tom. II. pag. 333. reperietur autem (vt §. 7.) $f = 0{,}535 \, l = l\sqrt{\frac{2}{7}}$ proxime. Reliqua ſe habent, vt ſupra §. §. 8 et 9. indicatum fuit, rurſusque inuenitur $L = \frac{12}{49} \frac{p}{P} \times C$ proxime.

§. 11. Poſtquam ſic duplici methodo longitudinem penduli ſimplicis cum vibrationibus laminae iſochroni inueniſſem in numeris magnitudinibusque facili experimento eruendis, volui etiam inuenta mea ad experimenta reuocare, quae ſingula ſucceſſum habuere calculis, et theore-

theorematis noſtris conformem; vſus autem ſum tignis tereti-bus, ſtructurae et craſſitiei vniformis atque praelongis, in quibus oſcillationum numerum in dato tempore cognoſcere poteram.

§. 12. Notabilem habent proprietatem oſcillationes laminarum ſola longitudine a ſe inuicem differentium, nempe quod earum numerus in dato tempore ſit in ratione reciproca duplicata laminae longitudinis: id apparet ex formula §. 8. $\frac{gf^4}{m^4}$, quae longitudinem penduli iſochroni exhibet: quia enim g conſtans eſt vt et quantitas m^4, quando nempe laminae ſola longitudine differunt, ſequitur longitudinem penduli iſochroni ſe habere vt f^4; eſt autem f ſemper proportionalis longitudini laminae l (per aequationem vltimam §. 10.); igitur longitudo penduli iſochroni eſt in ratione biquadrata longitudinis l et numerus oſcillationum laminae in ratione reciproca duplicata eiusdem longitudinis: aliter itaque ſe habent huiusmodi oſcillationes quam in chordis tenſis ſola longitudine diuerſis: in his enim longitudines pendulorum iſochronorum ſunt in ratione quadrata longitudinum chordarum et numerus vibrationum ſequitur rationem reciprocam chordae longitudinis.

II. *De ſono laminarum vibratarum.*

§. 13. Nemo adhuc, quantum ſcio, de ſono quem laminae elaſticae deſcripto modo vibratae edunt diſerte ſermonem fecit aut ſaltem aliquas dedit obſeruationes, cuiusmodi plurimae datae fuerunt circa ſonos chordarum muſicarum tenſarum, priusquam perfecta earum theoria a Cel. Taylero, Patre meo aliisque inuenta fuit: ſcili-

cet ante hanc theoriam calculo analytico erutam ex obſeruationibus iam conſtiterat, numerum vibrationum in chordis tenſis infra datum tempus eſſe in ratione compoſita 1°. ex reciproca longitudinis chordae 2do. ex reciproca ponderis chordae et 3° ex ratione directa ſubduplicata ponderis chordam tendentis: numerum ipſum vero ex his datis abſolute definire, id ſoli theoriae ſublimi relictum fuit, quamuis multis artificiis a longo tempore vſi fuerint, vt id quoque experimentis inuenirent et quidem ſucceſſu tali, vt non multum admodum a vero aberrauerint. Tandem vero eo prouecta res fuit, vt cognitis pondere chordae, pondere chordam tendente et longitudine chordae verus vibrationum numerus pro dato tempore indicari poſſet, atque ſic edocti ſumus, cum praefata cognita ita fuerunt temperata vt a chorda vibrata ſonus choralis infimo C deſignatus ederetur, tunc chorda intra minutum ſecundum 116 vibrationes faciat, vnde iam numerus vibrationum pro reliquis ſonis omnibus innoteſcit. Haec quae de chordis vibratis inuenta ſunt, iam etiam pro laminis elaſticis eruimus, vtut indoles earum demum circumſcribatur differentialibus quarti ordinis. Id vero nunc vberius explicabo.

§. 14. Dixi laminas quantacunque elaſticitate praeditas longitudine tantas accipi poſſe, vt cum vibrantur, earum itus reditusque diſtincte percipere atque numerare liceat; atque ſic numerum vibrationum, acceptis prius ponderibus atque menſuris ad id neceſſariis, quem theoria indicat accuratiſſime ad experimenta reuocare potui: at cum laminae breuiores fiunt, mire accelerantur vibrationes mox aciem oculorum effugientes; diſtinctum tamen

men ſonum nondum edunt, niſi minimum 60 aut 70 vibrationes intra minutum ſecundum perficiantur; hunc autem accelerationis terminum poſtquam transgreſſae ſunt, ſonus iam percipitur, qualis in crembalis vibratis oritur: hinc anſam cepi theoriam hanc a theoria ſonorum confirmare, iſtudque negotii hoc modo aggreſſus ſum.

§. 15. *Experimentum.* Acum adhibui ferream, quibus in texendis tibialibus vtuntur, craſſitiei dimidiae lineae proxime: longitudo erat 327 particularum, quarum 3166 efficiunt longitudinem penduli ſimplicis ad minuta ſecunda oſcillantis: pondus acus erat 17 granorum: acum hanc parieti firmiter et horizontaliter infixi ita vt longitudo reſidua extra parietem prominens eſſet 297 partium haberetque pondus circiter $15\frac{1}{2}$ granorum: extremitati acus ita firmatae appendi pondus duarum vnciarum cum ſcrupulis duobus ſeu 1000 granorum: extremitas acus ab hoc pondere inferiora verſus tracta fuit 27 particulis: pondus autem acus ipſius hic attendi non meretur, praeſertim cum iam ante pondus appenſum incurvando paululum acum exercerit effectum ſuum.

Vt iam videamus numerum vibrationum, quas acus vibrata intra minutum ſecundum perficere debeat, adhibebimus formulam, quam §. 9. dedimus pro longitudine penduli iſochroni, nempe $L = \frac{12\,p}{49\,P}C$, in qua vi experimenti ponendum eſt $p = 15\frac{1}{2}$ gran. P = 1000 gran. et C = 27 part. quibus ſubſtitutis numeris fit L = 0, 1025 part. pendulum autem ſimplex longitudinis 0, 1025 part. facit 175 vibrationes intra minutum ſecundum, hicque vibrationum numerus proxime conuenit ſono chorali qui littera G deſignatur. Tum demum vibrata acu ſonum vniſonum

ſonum in cymbalo exploraui, hicque reuera fuit ſonus G.

§. 16. Poſt hoc experimentum fundamentale tentare porro volui an experimenta quoque confirmatura eſſent theorema noſtrum, *quod ſoni ſint in ratione reciproca duplicata acus longitudinum* §. 11 indicatum; nec euentus expectationem feſellit: ita V. gr. cum acus eiusdem quantum prominebat longitudo prioris eſſet dimidia, nempe $148\frac{1}{2}$ part. ſoni prioris obtinui octauam duplicem ſeu disdiapaſon; octauamque ſimplicem ſiue diapaſon habui cum acus longitudo eſſet 210 part. Huic legi etiam ſubiicitur inſtrumentum quod Gallis dicitur *carillon* quum id conficitur ex prismatibus chalybeis ſola longitudine a ſe inuicem diſcrepantibus, qualia horologiis domeſticis quandoque applicantur, quamuis huiusmodi prismata vibrationes ſuas minimas non eodem modo perficiant, quippe non muro inifixa ſed libera; conſtitui autem hoc alterum vibrationum genus alia occaſione proſequi, a quibus disquiſitionibus rem acuſticam non parum perfici poſſe crediderim.

§. 17. Redeamus nunc vnde digreſſi ſumus. Expoſui in fine § 7. aequationem per ſeriem, cuius ope determinari poſſit valor rationis $\frac{l}{f}$, aliamque dedi aequationem eidem fini inſeruientem in fine §. 10. et vtraque inuenimus $\frac{l}{f} = \sqrt{\frac{7}{2}}$ quam proxime. Verum ſi attentius perpendamus vtriusque aequationis indolem, facile intelligemus infinitos alios valores quantitati $\frac{l}{f}$ aſſignari poſſe, qui omnes aequationibus §. §. 7. et 10. accurate ſatisfaciant, hae quidem radices non poſſunt niſi taediosiſſimo labore in aequatione §. 7. nequidem per approximationes definiri, at ope alterius aequationis §. 10 quamuis non niſi forma a priori diuerſae, proxime determi-

terminari poſſunt concinne admodum et eleganter, quae potiſſimum ratio me commouit vt eam alteri ſuperadderem: hanc itaque aequationem hic rurſus tranſcribam, inueni

$$\frac{l}{f} = 2\ Arc.\ ſin.\ \frac{1 + e^{l:f}}{\pm \sqrt{(2 + 2e^{2l:f})}}$$

Iam vero notandum eſt, valores quantitatis $\frac{l}{f}$ poſt illum quem iam indicaui admodum creſcere, ita vt valor proximus quantitatis $\frac{l}{f}$ ſit fere $= 5$ triploque priori maior: poteſt adeoque ſine vllo ſenſibili errore negligi vnitas in numeratore atque binarius in denominatore atque ſic ſimpliciter poni

$$\frac{l}{f} = 2\ Arc.\ ſin.\ \frac{1}{\pm\sqrt{2}}.$$

Sit nunc quadrans circuli, cuius radius vnitate exprimitur, $= q$, erunt radices praefatae aequationis omnes contentae in hac progreſſione

q, $3q$, $5q$, $7q$ etc. quae generaliter indicatur per $(2r-1)q$ ſi per r intelligitur numerus integer qualiscunque; ſola radix prima paullo notabiliter a vera aberrat; reliquae omnes ſenſibilem errorem non inuoluunt: quaeuis harum radicum aliam atque aliam, et quidem continue minorem dat longitudinem penduli iſochroni: cum enim (per §§. 8 et 9) haec longitudo ſit generaliter $= \frac{3p}{P} \times \frac{f^4}{l^4} \times C$ [eſt enim $L = \frac{gc}{G}$ (per §. 4) $= \frac{f^4 g}{m^4}$ (per §. 7) $= \frac{3f^4 gC}{Pl^3}$ (per §. 8) $= \frac{3f^4 glC}{Pl^4} = \frac{3p}{P} \times \frac{f^4}{l^4} \times C$] ſi igitur ſucceſſiue ſubſtituantur inuenti valores quantitatis $\frac{l}{f}$, inueniuntur tales valores pro longitudine penduli iſochroni L

$$\frac{3p}{P} \times \left(\frac{1}{q}\right)^4 \times C;\ \frac{3p}{P} \times \left(\frac{1}{3q}\right)^4 \times C;\ \frac{3p}{P} \times \left(\frac{1}{5q}\right)^4 \times C \text{ etc.}$$

ſiue generaliter $L = \frac{3p}{P} \times \left(\frac{1}{(2r-1)q}\right)^4 \times C$ poſito pro r numero integro qualicunque, vbi tamen notandum quod poſito

$r =$

$r = 1$, valor ipſius L hoc modo inuentus a vero nimis deficiat quam vt admitti poſſit: reliqui autem tam cito ad verum valorem conuergunt, vt ſine ſcrupulo vllo abhiberi queant et mereantur.

§. 18. Quaeritur nunc, quemadmodum hi diuerſi valores locum habere poſſint? notandum igitur eſt, laminam B E vibratam infinitis modis ſe incuruare poſſe: modus ſimpliciſſimus eſt, quem figura prima ſiſtit et de quo plus ſatis egimus; modus ſecundus figura 3tia illuſtratur, in qua DL ſeu nodi diſtantia a puncto D circitur quintam totius longitudinis DB partem efficit: pro hiſce vibrationibus ponendum eſt $\frac{l}{f} = 3q$ ſitque L $= \frac{3p}{P} \times (\frac{1}{3q})^4 \times$ C. Hinc fit vt ſi lamina BD veluti hypomochlio in definito puncto L ſuffulciatur atque ſic vibretur, vibrationes fiant regulariones diutiusque durent, imo et ſonus ſi quis eſt clarior percipiatur, quam ſi hypomochlium alii puncto applicetur, tertium oſcillationum genus indicatur figura
Tab. II. 4ta et pro hoc genere fit $\frac{l}{f} = 5q$ atque L $= \frac{3p}{P} (\frac{1}{5q})^4 \times$C et ſic deinceps. Atque ex his exemplis patet, quo ſenſu annotationes noſtrae accipi debeant: Hac autem oſcillationum variationes ſuo quoque modo fiunt in chordis muſicis nec non in catenis verticaliter ſuſpenſis, vt alibi demoſtraui et ſere vbique locum habent.

PERI-

PERIPHERIA CIRCVLI
MECHANICE DVPLICITER RECTIFICATA.

AVCTORE
G. W. Krafft.

§. 1.

Dum Geometrica periphaeriae circularis rectificatione caremus: mechanica tantiſper vtendum eſt, quae, ſi ad verum exacte non accedat, haud tamen longe ab eo abſit. Receptae igitur iamdiu ſunt inter Geometras plurimae ſolutiones, quibus cito, atque etiam ſatis tuto, datam circuli peripheriam in lineam rectam exdendere licet, quoniam in praxi Geometriae frequentior huius problematis vſus occurrere ſolet. Tales celebrantur *Vietae*, Cardinalis *Cuſani*, *Auguſtini Hirſchuogellii*, *Caroli de Boüelles*, *Hugenii*, *Comierſii*, et aliorum, quas expoſitas legimus in *Dan. Schwenteri* Geometria Practica pag. 133. 136. 137. in *Actis Lipſ.* 1685 m. Auguſto; *Geometrie pratique*, à Paris 1542; *Iournal des Sauans* Tomo II. pag. 441. nec non ad annum 1676 pag. 114. Sin autem in nodo hoc Gordio rectificationis circuli, atque pendentis ex ea Quadraturae, ſecando, cui ſoluendo hucusque impares fuerunt omnes, occupari quis cupiat: ad haec duo imprimis reſpicere debet, vt primo ad numeros *Ludolphianos* accedatur quam proxime id fieri poteſt, atque ſecundo quam pauciſſimis operationibus abſoluatur problema, vt ne inſtrumentorum ineuitabili errore a praefixo ſcopo abduci facile poſſimus.

§ 2. Communicauit mecum literis humaniſſimis ante aliquot menſes talem mechanicam ſolutionem Clariſſ. *Henricus Kühn*, Profeſſor Matheſ. Gedanenſis, ex eo praecipue commendabilem, quod breuiſſima praxi quaeſitum eruat, quam pace Clariſſimi Authoris hic adiungam. In
Tab. II. fig. 5. circulo propoſito ADBE ducatur diameter AB, radius AC transferatur ex A in E, et ducatur recta indefinita EBF; tum chordae quadrantis BD capiatur aequalis BF; eritque recta EF quamproxime aequalis ſemiperipheriae circuli propoſiti. Vt appareat quam prope abſit a proportione *Ludolphiana* diametri ad peripheriam $1 : \frac{31\,415\,926}{10\,000\,000}$ haec conſtructio, patet rectam EF eſſe ſummam ex chorda $120°$, et chorda $90°$, vel ſummam ex ſinu $60°$, et ſinu $45°$, aſſumta diametro AB pro ſinu toto. Poſita itaque diametro $AB = 1$, erit $AE = AC = \frac{1}{2}$, conſequenter $EB = = \frac{\sqrt{3}}{2}$; porro eſt $BF = BD = \frac{\sqrt{2}}{2}$ vnde fit ſemiperipheria $EF = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$, et oritur proportio diametri ad peripheriam $= 1 : \sqrt{3} + \sqrt{2} = 1 . \frac{31\,462\,643}{10\,000\,000}$, quae *Ludolphianam* excedit quantitate $\frac{46717}{10000000}$.

§. 3. Occaſione huius praecedentis conſtructionis incidi, poſt varias de hac re meditationes, in duas ſequentes ſolutiones eiusdem problematis, quae et a vero propius abſunt, et parum difficiliori enchireſi finiantur, quarum prima haec eſt. In circulo propſito ADB du-
fig. 6. catur diameter AB, et biſectis, ſemiperipheria in D, radioque CB in E, capiatur $EF = ED$; tum applicata CF in BG, et biſecto arcu BG in H, ducantur chordae BH et BD, eritque $2\,BD + BH =$ ſemiperipheriae quamproxime. Vt eruam quam prope abſit haec conſtructio a proportione *Ludolphiana*, patet ex elementis,

tis, radium CA media et extrema ratione ſectum eſſe in F, conſequenter partem maiorem radii ita ſecti CF (= BG) eſſe latus Decagoni regularis circulo inſcribendi hinc arcus BG erit 36°, et arcus BH 18°; atque adeo erit ſemiperipheria = 2 chordae 90° + chordae 18° = 2 ſinus 45° + ſinu 9°, aſſumta iterum diametro pro ſinu toto. Summa haec ex tabulis ſinuum deprehenditur eſſe 15 706 481; erit ergo ex hac conſtructione proportio diametri ad peripheriam $= 1 : \frac{31\,412\,962}{10\,000\,000}$, quae a *Ludolphiana* deficit hac quantitate $\frac{2\,964}{10\,000\,000}$.

§. 4. Secunda conſtructio multo adhuc propius ad verum pertingit, ſed dependet a triſectione anguli; quam vero exercitata manus haud adeo difficulter tentando perficere poteſt. Nempe ducta in circulo propoſito diametro AB, applicetur AD chorda 90°, et capiatur arcus BE 60°, applicatione radii; hic arcus BE diuidatur in partes aequales nouem, quarum ſumantur ſeptem BF, et ex F in diametrum demittatur perpendicularis FG, ſinus futura arcus BF; eritque AC + AD + FG = ſemiperipheriae quamproxime. *Eſt* enim, aſſumto iam radio AC pro ſinu toto, AC + AD + FG = ſinui toti + chorda 90° + ſinu $46^{\circ}\,40'$ = ſinui toti + 2 ſin. 45° + ſinu $46^{\circ}\,40'$, quae ſumma ex tabulis eſt 31 415 872 = ſemiperipheriae, vnde prodit, ratio diametri ad peripheriam $= 2\,AC : 2 \times 31\,415\,872 = 1 : \frac{31\,415\,872}{10\,000\,000}$ quae a *Ludolphiano* numero non differt niſi quantitate $\frac{[illegible]4}{10\,000\,000}$ in defectu; qua quidem conſtructione nullam exactiorem hucusque vidi. Fig. 7.

DE MOTV OSCILLATORIO CORPORVM FLEXIBILIVM.

AVCTORE
LEONH. EVLERO.

§. 1.

Doctrina de oſcillationibus corporum tanto ſtudio a longo iam tempore eſt perueſtigata, vt ea omnino exhauſta eſſe videatur. Poſtquam enim Hugenius caepiſſet motum oſcillatorium corporum rigidorum ex axe fixo ſuſpenſorum ad calculum reuocare: plurima alia oſcillationum genera a Mathematicis ſunt tractata ac determinata tam pro corporibus rigidis, quam flexibilibus atque etiam fluidis: neque ſolum in vacuo, ſed etiam in medio reſiſtente hos motus oſcillatorios ſunt perſcrutati. Dedi quoque in Comment. Acad. Imper. Petrolitanae Tom. VIII. diſſertationem de hoc eodem argumento latiſſime patentem, in qua methodi perquam facilis et expeditae ope innumerabilia oſcillationum genera, cuiusmodi ſunt chordarum vibrantium, laminarum elaſticarum altero termino fixarum, funium ſeu catenarum ſuſpenſarum etc. definiui, ac pro quouis caſu longitudinem penduli ſimplicis iſochroni aſſignaui. Quamuis autem haec doctrina penitus abſoluta videatur, occurrunt tamen nonnunquam eiusmodi oſcilationum caſus, qui peculiari explicatione indigent; hocque adeo euenit in iis generibus, quae prae ceteris ampliſſime euoluta videntur.

§. 2.

§. 2. Huiusmodi ſcilicet quaeſtionem mihi propoſuit Vir Celeberr. Dan. Bernoullius, circa corpora rigida de puncto fixo ope fili ſuſpenſa, qui caſus primo intuitu ille ipſe eſſe videtur, quem Hugenius in ipſo initio expedivit; filum enim in hac quaeſtione ſubtiliſſimum ponitur, ita vt perpetuo in lineam rectam maneat extenſum. Hoc tamen non obſtante ingens deprehendetur diſcrimen inter hunc et Hugeneii caſum, qui vulgo per inuentionem centri oſcillationis reſolui ſolet. Namque in caſu Hugeniano corpus non aliter mobile ſtatuitur, niſi circa axem, ex quo eſt ſuſpenſum, ſaltem actu alium motum in corpore non exiſtere ponitur praeter angularem circa axem ſuspenſionis: atque in hoc negotio corpus cum filo, cuius ope ſuspenditur, tanquam rigidum omnisque flexionis incapax ſpectatur. Quamuis autem in caſu Bernoulliano animum a flexibilitate fili abſtrahamus ſeu eius loco virgam rigidam ſubſtituamus; tamen iſte motus more conſueto definiri nequit, niſi ſimul iunctura, qua corpus cum filo ſeu virga connectitur, omnis mobilitatis ſit expers. Quod ſi autem corpus circa hanc iuncturam motum recipere queat: tum durantibus oſcillationibus corpus non ſolum circa axem fixum feretur motu angulari, ſed etiam circa iuncturam aliquantum vacillabit; hocque duplici motu fit, vt methodo vſitata per centri oſcillationis inueſtigationem verus motus oſcillatorius determinari nequeat. Atque circa hunc caſum verſabatur quaeſtio, quam Celeb. Bernoullius mihi propoſuerat.

§. 3. Ad hanc ſimilesque alias quaeſtiones cum diſtincte intelligendas tum expedite reſoluendas naturam motus oſcillatorii ex ipſis principiis altius repetemus. Ac primo

mo quidem in omni motu oſcillatorio ſpectandus eſt ſtatus quietis ſeu aequilibri, in quo corpus, ſi ſemel fuerit conſtitutum, acquieſcat: ſunt enim oſcillationes nil aliud niſi alternae acceſſiones ac receſſiones a ſtatu aequilibrii. Sic penduli ex puncto fixo ſuſpenſi ſtatus quietis eſt, quo recta per punctum iſtud fixum et centrum grauitatis corporis ducta ſitum tenet verticalem; dum autem oſcillationes peragit, cis et vltra hunc ſtatum alternatim excurrit, donec tandem in hoc ſtatu quieſcat. Sic quoque in chorda tenſa datur ſtatus quietis, e quo ſi chorda deturbetur, vibrationes peragendo alternatim cis et vltra hunc ſitum digreditur. Ac ſimili modo in omni motu oſcillatorio obſeruantur eiusmodi reciprocationes, quibus corpora alternatim accedunt ac recedunt in eadem via ſemperque in huius viae medio exiſtit ſtatus quietis, in quo corpus tandem, excurſionibus penitus extinctis, quieſcat. Oſcillatio autem vocatur vna huiusmodi motus reciproci periodus, qua corpus e ſtatu quietis digreſſum iterum ad eum accedit, indeque vlterius recedit, donec denuo in eadem via reuerti incipiat: ex quo vna quaeque oſcillatio duabus conſtat partibus, quarum priori ad ſtatum quietis accedit, poſteriore ab eo recedit. Oſcillatio ergo finitur cum corpus maxime a ſtatu quietis receſſerit: ibique incipit noua ſequens oſcillatio, quae pariter abſoluetur acceſſione ad ſtatum quietis, ac ſubſequente receſſione ab eodem termino.

§. 4. Primum igitur natura ſtatus quietis, qui in omni motu oſcillatorio ineſt diligentius perſcrutari oportet, cum ex eo motus oſcillatorius potiſſimum pendeat, ac determinetur. Duplici autem modo corpus in quiete verſa-

verſari poteſt: primum ſcilicet ſi a nullis omnino potentiis ſollicitetur tum enim vi primae motus legis in eodem ſtatu perpetuo perſeuerabit: deinde vero corpus etiamſi a potentiis ſollicitetur, tamen in quiete perſiſtere poteſt, ſi potentiae ſe mutuo deſtruant, atque in aequilibrio ſint conſtitutae: atque hinc iſte quietis ſtatus, vt a priori diſtinguatur, ſtatus aequilibrii vocari ſolet. Prior quietis ſtatus, quo corpus a nullis vrgetur potentiis omnino ad motum oſcillatorium producendum eſt ineptus; licet enim hoc corpus ex hoc ſtatu remoueatur, tamen ob defectum virium id ſollicitantium, non in priſtinum ſtatum reuertetur, ſed in ſtatu remoto pariter quieſcet. Quodſi autem potentiarum corpus ſollicitantium, dum corpus ex ſtatu quietis deturbatur, aequilibrium rumpitur, tum vtique aderunt vires corpus in ſtatum quietis repellentes; et quoniam ab his viribus corpori motus imprimitur, corpus cum quadam celeritate in ſtatum aequilibrii appellet, proinde vlterius excurret in plagam oppoſitam donec eius motus a viribus contra nitentibus abſumatur, tum vero ob ſimilem cauſam rurſus ad ſtatum aequilibrii vrgebitur, ſicque motu reciproco accedendo et recedendo oſcillationes peraget.

§. 5. Motus igitur oſcillatorius exiſtit, ſi vires corpus ſollicitantes ita fuerint comparatae, vt, cum corpus extra ſtatum quietis conſtituitur, eae corpus verſus hunc quietis ſtatum propellant. Conſideremus primum corpus inſtar puncti ſitque C eius locus quietis, in quo potentiae id ſollicitantes in aequilibrio ſint conſtitutae. Concipiatur iam corpus ex C in A transferri, et quia in A non eſt ſtatus aequilibrii, corpus ex A in directione Tab. III. fig. 1.

A C

AC ſollicitabitur atque ſi ſibi relinquatur actu per ſpatium AC promouebitur; continuo autem in hoc motu accelerabitur, quia in ſingulis ſpatii AC punctis P p vis adeſt corpus verſus C propellens, ideoque maxima cum celeritate in C appellet, qua, etſi in C eſt ſtatus quietis quoniam tamen ibi nullam virium actionem patitur, vltra in directione CB perget. Quamprimum autem vltra C pertingit, ſubibit actionem virium id retro verſus C pellentium, quibus propterea eius motus iterum retardabitur, donec tandem in B omnis motus ab his viribus reluctantibus deſtruatur. Ex B igitur ab iisdem viribus reuerti cogetur in via BC, hocque in motu pariter usque in C accelerabitur, ita vt motu concepto iterum verſus A excurrere debeat; donec omnem motum amiſerit Abſoluet ergo corpus oſcillationes tamdiu, quoad propter reſiſtentiam aeris aliaque obſtacula omnem motum amittat, atque in C quiescat.

§. 6. Ad motum ergo iſtiusmodi oſcillationum determinandum noſſe oportet vim; qua corpus in quauis a puncto C diſtantia poſitum eo vrgetur. Quae vis, ſi in ſe ſpectetur, vtique quamcunque legem elongationis a puncto C ſequi poteſt, hincque innumerabilia oſcillationum genera orirentur; interim tamen, quoniam iſta vis euaneſcit, ſi corpus in ipſo puncto C verſatur, neceſſe eſt, vt haec vis eo maior euadat, quo longius corpus a puncto C remoueatur: Sicque corpore in P exiſtente quantitas vis, quae id verſus C vrgebit, proportionalis erit functioni cuipiam diſtantiae CP, quae ſit $= x$, quae euaneſcat poſito $x = 0$. Si igitur haec functio, cui vis corpus in diſtantia CP $= x$ verſus C ſollicitans eſt pro-

portio-

portionalis ponatur, $= \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 +$ etc. manifeſtum eſt ſi elongationes a puncto C fuerint minimae, tum vires corpus in quauis diſtantia $CP = x$ verſus C ſollicitantes fore his ipſis diſtantiis proportionales: vis igitur, quae corpus in A conſtitutum verſus C pellit, eſt ad vim corpus in P exiſtens verſus C pellentem vt AC ad PC. Atque ſimili modo in altera parte CB, vbi x ſit negatiua, in quauis diſtantia CQ corpus in directione QC ſollicitabitur vi ipſi diſtantiae CQ proportionali. Haec autem virium ſollicitantium lex diſtantiis a ſitu aequilibrii proportionalis, ſiquidem diſtantiae fuerint quam minimae, in omnibus oſcillationum generibus, quae quidem in mundo obſeruantur, locum habet, ita vt ea inſtar principii omnis motus oſcillatorii vti poſſimus.

§. 7. Hoc principio ſtabilito ſequitur omnes oſcillationes eiusdem corporis, ſiue inter oſcillandum maiora ſiue minora ſpatia percurrat, dummodo in ſe ſpectata ſint minima, eodem tempore abſolui debere ſeu fore iſochronas. Sit enim initio corpus ex C in A vſque deductum ex quo loco motum oſcillatorium coeperit, perueneritque iam in P ac ponatur $AC = a$, $CP = x$, et celeritas, qua corpus elementum ſpatii $Pp = dx$ percurrit debita ſit altitudini v. Sit iam g vis acceleratrix, qua corpus in data diſtantia c a ſitu C verſus C ſollicitatur, erit vis qua in P actu per Pp acceleratur $= \frac{gx}{c}$; vnde fiet $dv = \frac{-gx\,dx}{c}$, hincque $v = \frac{g}{2c}(aa - xx)$. Ipſa ergo celeritas in P erit $= \sqrt{v} = \sqrt{\frac{g}{2c}(aa - xx)}$; ideoque corpus in C adueniet celeritate $= a\sqrt{\frac{g}{2c}}$. Tempusculum vero, quo per ſpatiolum $Pp = -dx$ tranſibit

 erit

erit $= \frac{-dx}{\sqrt{\frac{g}{2c}(aa-xx)}}$: ex quo tempus per ſpatium AP erit $= \frac{A\,\text{coſ.}\frac{x}{a}}{\sqrt{\frac{g}{2c}}}$. Tempus ergo totius acceſſus per ſpatium AC erit $= \frac{\pi\sqrt{c}}{\sqrt{2g}}$: denotante $1 : \pi$ rationem diametri ad peripheriam.

§. 8. Hac acceſſione autem ſemiſſis primae oſcillationis abſoluitur, quae adeo fit tempore $\frac{\pi\sqrt{c}}{\sqrt{2g}}$, in qua expreſſione cum non inſit quantitas ſpatii percurſi AC $= a$, perſpicuum eſt acceſſionem corporis ad C perpetuo aequali tempore abſolui, ſiue maius ſiue minus ſpatium AC conficiat. Simili autem modo intelligetur receſſum per ſpatium CB, qui alteram oſcillationis partem conſtituit, eodem tempore abſolui, ita vt totum vnius oſcillationis tempus futurum ſit $= \frac{\pi\sqrt{2c}}{\sqrt{g}}$. Cum enim corpus in C veniat celeritate debita altitudini $\frac{gaa}{2c}$, ponamus hoc motu iam perueniſſe in Q, poſito CQ $= y$, vbi celeritas eius, qua per elementum Q$q = dy$ pergit, debita ſit altitudini u, in hoc ergo loco corpus retrahetur ac retardabitur vi $= \frac{gy}{c}$, vnde fit $du = \frac{-gydy}{c}$ ergo $u = \frac{g}{2c}(aa-yy)$. Excurret itaque antequam omnem motum amittat per ſpatium CB $= a$, ita vt ſit CB $=$ AC. Tempus autem per ſpatium CQ $= y$ erit $=$ $\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{g}{2c}(aa-yy)}} = \frac{A\,\text{ſin.}\frac{y}{a}}{\sqrt{\frac{g}{2c}}}$. Fiat $y = a$, ac prodibit tempus receſſionis integrae per ſpatium CB, $= \frac{\pi\sqrt{c}}{\sqrt{2g}}$; quod vtique aequale eſt tempori acceſſionis per AC, ita

ita vt tempus totius oſcillationis per ACB factae ſututurum ſit $= \frac{\pi\sqrt{2c}}{\sqrt{g}}$, huicque aequalia erunt tempora omnium ſequentium oſcillationum.

§ 9 Commodiſſime autem tempora huiusmodi oſcillationum menſurari ſolent per pendula ſimplicia eodem tempore oſcillationes ſuas abſoluentia. Cum enim pendulum ſimplex, cuius longitudo eſt 3, 166 pedum Rhen. ſingulis minutis ſecundis oſcillationes peragat, atque tempora diuerſorum pendulorum ſequantur longitudinum rationem ſubduplicatam, manifeſtum eſt, ſi cognoſcamus longitudinem penduli ſimplicis iſochroni cum motu quopiam oſcillatorio propoſito, tum ſimul veram oſcillationum durationem innoteſcere. Pendulum quidem ſimplex eſt res mere imaginaria, cum per id intelligatur corpus infinite paruum ope fili infinite tenuis et inertia deſtituti ex puncto fixo ſuspenſum: attamen eiusmodi pendulum etſi imaginarium commode pro menſura quarumcunque oſcillationum adhibetur, cum per id non ſolum ratio, quam diuerſae oſcillationes inter ſe tenent, cognoſcatur, ſed etiam duratio oſcillationum per cognitas temporis particulas, veluti minuta ſecunda aſſignari queat. Atque huc quoque referenda eſt centri oſcillationis inueſtigatio, aequatur enim ſemper diſtantia centri oſcillationis ab axe ſuspenſionis longitudini penduli ſimplicis iſochroni.

§. 10. Vt igitur motum oſcillatorium quemcunque cum pendulo ſimplici comparare queamus, contemplemur pendulum ſimplex OC, quod conſtet ex corpuſculo infinite paruo C cuius pondus ſit $= p$, ope fili OC cum inertiae tum grauitatis expertis ex polo fixo O ſuspenſo: ſit longitudo huius penduli OC $= f$; eritque hoc pendulum in ſtatu quietis, ſi recta OC fuerit verticalis. Deducatur hoc Fig. 2.

R 2 pen-

pendulum OC infinite parum in ſitum OA, in quo vtique ceſſabit aequilibrium; cum enim ponduſculum p in A poſitum ſollicitetur deorſum in directione verticali AE, quae non amplius cum directione fili OA congruit, reſoluatur vis AE, quae aequalis eſt ponderi corpusculi p, in laterales AN et AM, quarum illa AN in tenſione fili conſumitur, haec vero AM corpusculum in directione AMC ad ſpatium AC percurrendum ſollicitabit. Erit vero ob triangula ſimilia OAC et EAM, vis AM $= \frac{p.AC}{OC}$, ita vt corpusculum in A ſollicitetur ſecundum directionem AC vi $= \frac{p.AC}{OC}$, quae vtique diſtantiae corpusculi AC a ſitu quietis eſt proportionalis, quamobrem omnes oſcillationes huius penduli aequalibus abſoluentur temporibus, dummodo ſpatiola AC fuerint minima. Quoniam vero maſſa corpusculi eſt pariter $= p$, erit vis acceleratrix corpusculum in A ſollicitans $= \frac{AC}{OC} = \frac{AC}{f}$.

§. 11. Vis igitur acceleratrix, qua corpusculum C ad quamcunque diſtantiam AC a ſitu quietis C deductum verſus C ſollicitatur aequalis eſt ipſi diſtantiae AC diuiſae per longitudinem penduli OC $= f$, ſeu haec vis acceleratrix eſt ad vim acceleratricem grauitatis naturalis vti ſpatium AC ad longitudinem penduli OC. Quodſi igitur in praecedente caſu, quo corpusculum ex C in A deductum ad motum oſcillatorium impellitur vis acceleratrix in quauis diſtantia CP $= x$, fuerit aequalis vi acceleratrici, qua pendulum ſimplex in eadem diſtantia verſus ſtatum quietis vrgetur, tum oſcillationes in vtroque caſu abſoluentur aequalibus temporibus, atque longitudo OC $= f$ dabit pendulum ſimplex iſochronum cum motu oſcillatorio fig. 1.. In fig. 1 autem eſt in diſtantia

Fig. 1 et 2.

tia CP $=x$ vis acceleratrix $=\frac{gx}{c}$; in pendulo autem pro eadem diſtantia eſt vis acceleratrix $=\frac{x}{f}$; ex quarum aequalitate ſequitur $f=\frac{c}{g}$. Statim ergo pro quouis motu oſcillatorio ex ſola vi acceleratrice innoteſcit longitudo penduli ſimplicis iſochroni, quae prodit, ſi ſpatium CP per vim acceleratricem, quam corpus in hac diſtantia ſentit diuidatur, hic enim quotus vbique podit eiusdem quantitatis.

§. 12. Viciſſim igitur ſi conſtet longitudo penduli ſimplicis iſochroni, quae ſit $=f$, pro motu quopiam oſcillatorio, definire poterimus vim acceleratricem in quauis a ſtatu quietis diſtantia. Si nimirum punctum C per ſpatium AB vti ante expoſuimus, oſcillationes abſoluat paribus temporibus vti pendulum ſimplex longitudinis f; neceſſe eſt, vt vis acceleratrix, qua corpusculum in quauis elongatione CP $=x$ a ſtatu quietis C impellitur ſit $=\frac{x}{f}$; ſiquidem, vti in ſequentibus ſemper aſſumimus, oſcillationes fiant per ſpatia quam minima. Quodſi autem longitudo penduli ſimplicis non fuerit cognita, tamen, ſi ea quaſi cognita tractetur, quemadmodum in analyſi quantitates incognitae, tanquam eſſent cognitae tractari ſolent, expreſſio pro vi acceleratrice in quauis a ſtatu quietis diſtantia reperietur; quae proinde ſi comparetur cum vi, qua corpus actu ſollicitatur, dabit aequationem, ex qua longitudo penduli ſimplicis iſochroni determinabitur. Poſita nimirum pro motu oſcillatorio corpuſculi C per ſpatium AB, longitudine penduli ſimplicis iſochroni etſi ad huc incognita $=f$, erit corpusculi in P poſiti vis acceleratrix $=\frac{PC}{f}$; at ex huius aequili-

brii natura nouimus vim acceleratricem, qua corpus in eadem diſtantia P C actu ſollicitetur, eſſe $= \frac{g.PC}{c}$, vnde concludimus fore $\frac{PC}{f} = \frac{g.PC}{c}$, hincque $f = \frac{c}{g}$, ſimili igitur ratiocinio in quouis caſu longitudo penduli ſimplicis iſochroni ſatis expedite determinari poterit.

§. 13. Plana quidem haec ſunt, ſi corpus, quod oſcillationes peragit, inſtar puncti conſiderari poteſt, at ſi corpus finitam habeat extenſionem ratiocinium aliquanto magis fiet complicatum, interim tamen eodem modo expedietur. Primo enim probe notari debet ſitus, quem quaelibet corporis particula in ſtatu aequilibrii occupat, deinde corpus extra ſtatum aequilibrii infinite parum declinari concipiatur, vt obtineat ſitum ad oſcillationes producendas idoneum. Tum igitur quaeratur diſtantia cuiusvis corporis particulae in hoc ſtatu, a loco, quem in ſtatu aequilibrii obtinet; quae diſtantia ſimul viam cuique particulae percurrendam praebebit, donec ad ſtatum aequilibrii perueniat; quo motu prior vnius oſcillationis ſemiſſis abſoluitur. Cognita iam vniuscuiusque particulae diſtantia a ſuo ſitu quietis, et longitudine penduli ſimplicis iſochroni tanquam cognita aſſumta, innoteſcet vis acceleratrix vnamquamque particulam ſollicitans, quae in maſſam particulae ducta dabit vim motricem. Hinc ergo colligetur vis motrix totalis corpus ſollicitans, quae aequiualere debet viribus corpus actu vrgentibus, atque ex hac aequiualentia eiicietur longitudo penduli ſimplicis iſochroni.

§ 14. Conſideremus ergo corpus quodcunque A B C D rigidum, nullius mutationis in figura ſua capax, quod vel per ſe ſolum oſcillationes peragat, vel cum aliis corporibus coniunctum oſcilletur; dum enim vires inueſti-

inueſtigamus ad hoc requiſitas, vt oſcillationes dato tempore abſoluantur, quamuis corporis oſcillantis partem ſeorſim contemplari conuenit; et, ſi totum corpus oſcillans inflexiones admittat, conſtabit partibus vel finitae magnitudinis vel infinite paruae quae nullam mutationem recipiunt. Sit igitur ABCD eiusmodi corpus vel pars corporis oſcillantis omnis mutationis in figura ſua expers, ſitque ſitus, quem figura repraeſentat, eius ſtatus aequilibrii, in quo vel quieſcit, vel in quem peruenit in cuiuslibet oſcillationis medio. Dum igitur hoc corpus oſcillationes facit, alternatim de hoc ſitu aequilibrii vel verſus P vel Q recedit, hicque duo occurrunt caſus conſiderandi. Vel enim ſingulae corporis partes aequaliter a ſitu ſuo quietis recedunt, vel aliae magis aliae minus, quod poſterius euenit, ſi corpus in motu oſcillatorio circa axem quempiam fixum motu angulari fertur, tum enim corporis partes axi viciniores minus a loco quietis recedunt, quam eae, quae magis ſunt remotae.

§. 15. Ponamus primum in motu oſcillatorio omnes corporis partes aequaliter a ſuo aequilibrii ſitu digredi, ita vt corpus ſolo motu progreſſiuo feratur, quo ſingulae eius partes motu inter ſe parallelo, et aequalibus eodem tempore celeritatibus mouentur. Dum igitur corporis centrum grauitatis G per interuallum Gg in g transfertur, quaelibet corporis particula M per interuallum Mm ipſi Gg aequale et parallelum procedet. Quodſi ergo longitudo penduli ſimplicis iſochroni ſiue cognita ſit, ſiue incognita, ponatur $= f$, vis acceleratrix qua particula M in m poſita ſecundum directionem mM ſollicitatur erit $= \frac{Mm}{f} = \frac{Gg}{f}$. Ponatur diſtantia $Gg = \omega$, quam per-

perpetuo quaſi infinite paruam vel ſaltem minimam aſſumo, erit vis acceleratrix vrgens particulam M in directione $mM = \frac{\omega}{f}$. Multiplicetur haec per maſſam ſeu pondus ipſius particulae M, quod ſit $= p$, atque prodibit vis motrix particulam M ſollicitans $= \frac{\omega p}{f}$, quae exprimatur linea Mp in huius vis directione lineolae Gg parallela. Sic igitur innoteſcunt vires ſingulas corporis particulas ſollicitantes, cum centrum grauitatis corporis atque adeo ſingula elementa per ſpatiola ω a ſuis locis, quae in ſtatu aequilibrii tenent, receſſerunt.

§. 16. Quoniam directiones ſingularum harum virium ſollicitantium ſunt inter ſe parallelae, vis ipſis omnibus aequiualens earum ſummae aequabitur, eritque ideo $= \int \frac{\omega p}{f} = \frac{\omega}{f} \int p$, ob ω et f quantitates in hac ſummatione conſtantes. At cum p ſit maſſa vniuscuiusque corporis elementi, M denotabit $\int p$ maſſam ſeu pondus totius corporis. Quare ſi corporis maſſa ſeu pondus ponatur $= P$, erit vis motrix totalis ex ſingulis viribus ſollicitantibus reſultans $= \frac{\omega P}{f}$, huiusque directio parallela erit directionibus ſingularum virium, hoc eſt directioni gG. Ceterum cum iſte calculus omnino ſimilis ſit ei, quo centrum grauitatis cuiusque corporis inueſtigari ſolet, perſpicuum eſt mediam directionem omnium iſtarum virium partialium tranſire per corporis centrum grauitatis G; cum enim vires ſingulas corporis particulas ſollicitantes ſint ipſarum maſſis proportionales, ac directiones habeant inter ſe parallelas, neceſſe eſt, vt earum media directio per centrum grauitatis tranſeat. Quod ſi ergo per centrum grauitatis G ducatur recta $GP = \frac{\omega P}{f}$ in directione gG, haec recta exhibebit vim motricem totalem ad

hoc

hoc requiſitam, vt corpus ABCD motu ſibi parallelo oſcillationes peragendo eodem tempore oſcillationes abſoluat, quo pendulum ſimplex longitudinis f.

§. 17. Quo citius huius inueſtigationis vſus appareat, ponamus corpus A C B D inter duo elaſtra A E et B F tenſa eſſe conſtitutum, ita vt in aequilibrio verſetur, vbi vires elaſtrorum ſint inter ſe aequales; cum enim ſibi directe ſint contrariae, atque earum directiones per centrum grauitatis corporis G tranſeant, corpus vtique quieſcet, vbi vires elaſtrorum inter ſe ſunt aequales, quod in ſitu, quem figura praeſentat, euenire ponamus. Sit A vis, quam vtrumque elaſtrum in corpus interiectum exerit: ac pendebit eius quantitas a magnitudine interualli A E et C F, ita vt diminuto interuallo vis A creſcat, aucto vero interuallo decreſcat. Moueatur iam corpus motu ſibi parallelo verſus F, ita vt eius centrum grauitatis G per ſpatiolum $Gg = \omega$ progrediatur: hocque motu vis elaſtri B F intendetur, alterius vero A E tantundem remittetur. Fiat in hoc ſtatu vis elaſtri $BF = A + E\omega$, et elaſtri A E vis $= A - E\omega$: atque manifeſtum eſt vim, qua corpus verſus ſtatum aequilibrii vrgebitur fore $= 2E\omega$: quae vis vtique corpori motum oſcillatorium inducet. Ad hunc inueniendum ſit longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= f$, et pondus corporis $= P$; hincque vis corpus, cum per interuallum $Gg = \omega$ de ſtatu aequilibrii receſſerit erit $= \frac{P\omega}{f}$: fiat haec vis aequalis ei, qua actu ſollicitatur, $2E\omega$, atque reperietur longitudo penduli ſimplicis iſochroni $f = \frac{P}{2E}$. Aſſumimus autem elaſtra inertiae expertia, vt nulla vi opus ſit ad ipſa elaſtra mouenda. Fig. 4.

§. 18. Inueſtigemus iam vires ad motum oſcillatorium dato tempore producendum requiſitas, ſi corpus non
Fig. 5. motu ſibi parallelo ex ſtatu quietis recedat, ad eundemque accedat, ſed interea circa axem quempiam fixum gyretur, ita vt ſpatia, quae ſingulae corporis particulae percurrunt, ſint ipſarum diſtantiis ab axe proportionalia. Sit igitur corpus ABCD in ſtatu aequilibrii, quod dum oſcillationes peragit, circa axem fixum O, quem ad planum chartae normalem concipi oportet, motu angulari fertur. Planum chartae repraeſentet ſectionem ad axem O normalem per centrum grauitatis corporis G factam. Remoueatur iam hoc corpus aliquantillum ex ſtatu aequilibrii, ita vt eius centrum grauitatis G transferatur per arculum Gg centro O deſcriptum in g, atque quaelibet corporis particula M interea procedet per arculum Mm pariter centro O deſcriptum, ita vt ſit angulus MOm aequalis angulo GOg ſeu $Mm : Gg = OM : OG$. Hoc idem non ſolum in hac corporis ſectione per centrum grauitatis facta eueniet, ſed in omni ſectione corporis illi parallela ſeu ad axem O normali, ita vt de omnibus corporis particulis conſtet, per quaenam ſpatia transferantur dum centrum grauitatis G per arculum Gg promouetur: atque ſic diſtantia cuiusuis corporis particulae a ſitu, quem in ſtatu aequilibri tenebat, definiri poterit.

§ 19. Vocetur diſtantia $OG = a$, et ſpatiolum $Gg = \omega$, tum ex particula M in planum ad chartam normale ac per axem O et centrum grauitatis ductum ducatur perpendiculum ML, ponatur $OL = x$ et $LM = y$ erit $OM = \sqrt{(xx + yy}$ et per analogiam

giam datam $Mm = \frac{\omega\sqrt{(xx+yy)}}{a}$. Quodſi iam longitudo penduli ſimplicis iſochroni ſit $= f$, erit vis acceleratrix particulae M in m translatae per ſpatium mM $= \frac{Mm}{f} = \frac{\omega\sqrt{(xx+yy)}}{af}$, et denotante p maſſam elementi M erit vis motrix $= \frac{\omega p\sqrt{(xx+yy)}}{af}$ cuius directio erit Mp ad OM normalis. Reſoluatur haec vis in laterales ML et MI, erit vis in directione ML vrgens $= \frac{\omega px}{af}$, et vis in directione MN vrgens $= \frac{\omega py}{af}$. Summa autem omnium harum poſteriorum virium in directione MN eſt $= \frac{\omega}{af}\int yp$, at eſt yp momentum ponduſculi p ad axem OG relatum, qui axis cum per centrum grauitatis G tranſeat, erit ex natura centri grauitatis ſumma omnium horum momentorum nihilo aequalis; et hancobrem earum media directio prodiret infinita, ita vt poſitio vis omnibus aequiualentis determinari nequeat.

§. 20. Incommodum hoc tolletur, ſi omnes has vires MN in eandem directionem incidere faciamus. Cum enim perinde ſit, in quonam directionis ſuae Mp puncto vim $\frac{\omega p\sqrt{(xx+yy)}}{af}$ applicatam concipiamus, concipiamus eam applicatam in puncto p, vbi haec directio plano ad chartam normali atque per O et G ducto ocurrit, haecque reſoluta dabit vim lateralem in directione pq vrgentem $= \frac{\omega px}{af}$, et alteram vim lateralem in directione pC ſollicitantem $= \frac{\omega py}{af}$, quae poſteriores adeo vires omnes ſitae erunt in plano ad OC normali. Quarum ſumma cum ſit aequalis nihilo eae nihil ad motum conferent, ſed tantum conabuntur corpus circa axem BD inclinare, niſi earum momenta ad vtramque axis huius partem ſe mutuo deſtruant. Siquidem totum cor-

 pus

pus in planum ABCD eſſet explanatum, tum momenta harum virium reſpectu axis BD nulla exiſterent, at ſi elementum M non in plano chartae ſit ſitum ſed ab eo remotum ſit interuallo $= z$, tum momentum ad corpus circa axem BD conuertendum tendens foret $= \frac{\omega p y z}{a f}$; horum autem omnium momentorum ſumma plerumque eſt vehementer exigua, nam ſi vel ſectio ABCD, vel ſectio ad eam normalis per AC ducta corpus in duas partes ſimiles diuidat, tum omnio haec momenta elementaria ſe mutuo deſtruunt.

§. 21. Cum igitur ob hanc cauſam effectum, qui ab his viribus in directione p C agentibus vnquam oriri poteſt, negligere queamus, ſuperſunt tantum vires $\frac{\omega p x}{a f}$ in directione $p q$ applicatae, quarum ſumma eſt $= \frac{\omega}{a f} \int p x$. At $p x$ eſt momentum particulae M reſpectu axis O, ideoque ex natura centri grauitatis ſumma omnium iſtorum momentorum aequatur ponderi totius corporis, quod ſit $=$ P per diſtantiam centri grauitatis G ab axe O nemper O G $= a$ multiplicato, ita vt ſit $\int p x = \mathrm{P} a$. ideoque ſumma virium $\frac{\omega}{a f} \int p x = \frac{\omega \mathrm{P}}{f}$, quae ſimul eſt vis aequiualens omnibus viribus $\frac{\omega p x}{a f}$. Quod autem ad earum mediam directionem attinet, quae vtique parallela erit directionibus ſingularum $p q$, eius diſtantia ab axe O reperietur, ſi ſumma momentorum harum virium ad axem O relatorum, quae eſt $= \frac{\omega}{a f} \int p x .$ O p, diuidatur per ſummam ipſarum virium, quam vidimus eſſe $= \frac{\omega \mathrm{P}}{f}$. Capiatur ergo O S $= \frac{\int p x . \mathrm{O} p}{\mathrm{P} a}$, erit OS diſtantia vis aequiualentis ab axe O, at-

atque ſi in S applicetur vis $SP = \frac{\omega P}{f}$, indirectione SP ipſi pq parallela, haec vis aequiualebit ſingulis viribus particulas corporis ſollicitantibus ſimul ſumtis.

§. 22. Cum igitur in cognitione diſtantiae OS cardo rei verſetur, eam dilucide definiri conuenit; quoniam ergo OM eſt media proportionalis inter OL et Op fiet $x . Op = OM^2 = xx + yy$; ita vt futura ſit diſtantia $OS = \frac{\int p . OM^2}{Pa} = \frac{\int p(xx+yy)}{Pa}$. Singula igitur corporis elementa multiplicari debent per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe O, ac ſumma horum productorum diuiſa per Pa dabit diſtantiam OS, haecque eſt regula nota pro centro oſcillationis inueniendo. Vel ſi per G ductus concipiatur axis axi O parallelus, ad eumque ex M perpendicularis ducatur MG erit $OM^2 = MG^2 + OG^2 - 2 OG . GL$; ideoque $\int p . OM^2 = \int p MG^2 + \int p . OG^2 - 2 \int p . OG . GL$: at eſt $\int p . OG^2 = Pa^2$, ob $\int p = P$, et $\int p . OG . GL = a \int p . GL$, quae ſumma ob G centrum grauitatis euaneſcit, ſupereſt ergo $\int p . MG^2$, quae deſignat ſummam omnium productorum ex ſingulis corporis particulis in quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe per centrum grauitatis corporis G ducto atque axi O parallelo. Quodſi ergo haec ſumma quam momentum inertiae corporis reſpectu huius axis vocare ſoleo, ponatur $= Pbb$ fiet $\int p . OM^2 = Pbb + Paa$, ideoque diſtantia quaeſita $OS = a + \frac{bb}{a}$.

§. 23. Haec linea OS tantum dat diſtantiam vis ſollicitantis totalis $SP = \frac{\omega P}{f}$ ab axe O, neque etiamnum conſtat, vtrum ea in planum OBD per centrum gra-

vitatis G normaliter ad axem O ductum cadat an non. Sit igitur ad hoc inueſtigandum particulae M diſtantia ab hoc plano $= z$, eritque vis $p q = \frac{\omega p x}{a f}$ momentum ad hoc planum relatum $= \frac{\omega p x z}{a f}$: horum igitur momentorum omnium ſumma $\int \frac{\omega p x z}{a f}$ ſeu $\frac{\omega}{a f} \int p x z$ per ſummam virium $\frac{\omega P}{f}$ diuiſa dabit diſtantiam puncti S a plano ODB vel ſurſum accipiendam vel deorſum, prout ſumma $\int p x z$ affirmatiuum vel negatiuum obtineat valorem. Sit $GL = a - x = t$, erit $\int p x z = \int a p z - \int p t z = - \int p t z$ ob $\int a p z = 0$, quia planum OBD per centrum grauitatis tranſit, eritque diſtantia puncti S ab hoc plano $- \frac{\int p t z}{a P}$. Recipiunt vero tam t quam z valores cum affirmatiuos tum negatiuos, ita vt haec expreſſio plerumque ſit vehementer parua; omnino autem nulla erit ſi vel planum ABCD vel planum ad hoc normale per BD ductum corpus in duas partes ſimiles ſecet. Hancque ob rem in praeſenti inſtituto iſtam puncti S a plano OBD diſtantiam, ſi quam habet, negligemus.

§. 24. Si igitur corpus ABCD ita oſcilletur, vt inter oſcillandum circa axem fixum O moueatur, atque eius oſcillationibus iſochronum ſit pendulum longitudin f, vis motrix ad motum hunc oſcillatotium producendum requiſita ſequenti modo determinabitur. Ponamus centrum grauitatis corporis G inter oſcillandum perueniſſe in g, ita vt eius diſtantia a loco quietis G ſit $Gg = \omega$: ſitque totius corporis maſſa ſeu pondus $= P$. Tum per centrum grauitatis G ductus concipiatur axis axi illi O parallelus, ac quaeratur corporis momentum inertiae reſpectu huius axis per centrum grauitatis ducti, quod ſit $= P b b$; re-

pe-

periturque, ſi ſingula corporis elementa per quadrata diſtantiarum ſuarum ab hoc axe multiplicentur, atque omnia producta in vnam ſummam coniiciantur. Quo facto ducatur per centrum grauitatis corporis G planum ad axem O normale, atque in recta OG ſumatur GS $= \frac{bb}{OG} = \frac{bb}{a}$ ob OG $= a$; in puncto S applicata concipiatur vis SP $= \frac{\omega P}{f}$ in directione SP ad OS in plano OBD normali, eritque haec vis illa ipſa, quae requiritur ad motum hunc oſcillatorium producendum. Ceterum patet, ſi axis O infinite diſtet, ita vt corpus motu ſibi parallelo feratur, tum punctum S in centrum grauitatis G incidere ob $a = \infty$, prorſus vti ante inuenimus.

§. 25. Propoſito igitur corpore quocunque rigido, quod a potentiis ſollicitatum oſcillationes peragat, eius motus oſcillatorius ſequenti modo determinabitur. Aſſumatur tanquam cognita longitudo penduli ſimplicis iſochroni f, ac diſpiciatur quonam modo corpus inter oſcillandum a ſtatu ſuo quietis digrediatur, vtrum motu ſibi parallelo an motu angulari circa axem quempiam fixum. Tum ſecundum praecepta pro vtroque caſu data quaeratur vis motrix ad hunc motum oſcillatorium producendum requiſita. Denique haec vis quia ob f incognitam eſt indeterminata aequiualens reddatur viribus corpus actu ſollicitantibus, hincque naſcetur aequatio longitudinem penduli ſimplicis iſochroni f determinans. Iſta autem aequiualentia obtinetur, ſi in locum vis motricis inuentae applicata concipiatur vis ipſi aequalis et contraria, tum enim haec vis cum viribus corpus actu ſollicitantibus in aequilibrio conſiſtere debet. Quoties namque vna vis

aliis

aliis viribus aequiualet, toties eius contraria cum his iisdem viribus aequilibrium conſtituet: ideoque ex natura aequilibrii deriuabitur aequatio longitudinem penduli ſimplicis iſochroni f determinans.

§. 26. Ex his iam ſtatim oſcillationes corporum inflexibilium ex axe fixo ſuſpenſorum a grauitate oriundae definiri poterunt, qui eſt caſus notiſſimus per inuentionem centri oſcillationis expediri ſolitus. Sit igitur corpus ABCD ope virgae rigidae OAB ex axe fixo horizontali O ita ſuſpenſum, vt alium motum praeter angularem circa hunc axem recipere nequeat, quod fiet, ſi virga OA non ſolum ipſa fuerit inflexilis, ſed etiam corpus traiiciat ipſiue tam firmiter infigatur, vt iunctura nullam inflexionem admittat: hanc enim conditionem abſolute neceſſariam eſſe, vt more conſueto per centrum oſcillationis motus recte definiatur ex ſequentibus clarius elucebit. Repraeſentet ergo planum chartae ſectionem corporis verticalem per eius centrum grauitatis G factam atque ad axem horizontalem O normalem, ita vt axis normaliter plano chartae in O infixus concipi debeat. Hoc ergo corpus in ſtatu aequilibrii erit ſitum, ſi recta OG in iſta ſectione ab axe O per centrum grauitatis G ducta fuerit verticalis puta Og, ita vt in figura centrum grauitatis G interuallo Gg, a ſuo aequilibrii ſitu diſtet. Notari hic vero oportet, punctum G non tam pro corporis ABCD, quam pro totius maſſae oſcillantis ex corpore ac virga OA compoſitae centro grauitatis accipiendum eſſe.

§. 27. Cum igitur centrum grauitatis G interuallo Gg a ſuo aequilibrii loco ſit remotum, ac totius corporis

poris motus fiat circa axem O, diſtantia cuiusque corporis elementi a ſuo ſitu aequilibrii erit cognita. Si ergo vocetur pondus corporis cum virga coniunctim $=$ P, eiusque momentum inertiae reſpectu axis horizontalis per centrum grauitatis G ducti et axi O paralleli ſit $=$ Pbb; atque longitudo penduli ſimplicis iſochroni ponatur $= f$ cognoſcetur vis ad hunc motum producendum requiſita. Scilicet cum ſpatium Gg ſit minimum, ita vt recta OG a ſitu verticali infinite parum diſcrepet, capiatur $GS = \frac{bb}{OG}$, et in S ſecundum directionem Ss ipſi Gg parallelam applicetur vis $= \frac{P.Gg}{f}$, quae ad hunc motum oſcillatorium producendum requiretur. Quanquam enim ante corpus in ſtatu aequilibrii poſitum ſumus contemplati, hic vero corpus in figura extra ſtatum aequilibrii repraeſentetur; tamen vtrinque ratiocinium idem eſt; ob declinationem a ſitu aequilibrii infinite parvam, de qua tantum ſpatiolum Gg in computum ingreditur.

§. 28. Haec igitur vis $\frac{P.Gg}{f}$ in directione Ss applicata, exiſtente $GS = \frac{bb}{OG}$, eundem motum oſcillatorium producere valet, quem vis corpus actu ſollicitans nempe eius pondus, producit. Corpus autem actu ſollicitatur a vi, ponderi ipſius P aequali in directione verticali GP: exquo vis P in directione GP aequiualebit vi $\frac{P.Gg}{f}$ in directione Ss. Quodſi ergo loco huius vis applicetur ipſi aequalis $\frac{P.Gg}{f}$ at in directione contraria SQ, haec vis cum vi P in directione GP coniuncta corpus in aequilibrio continebit. Cum autem corpus alium motum praeter angularem circa axem O recipere nequeat, in aequilibrio erit, ſi momenta harum duarum virium reſpectu axis O

ſe mutuo deſtruant. At eſt vis P in directione G P agentis momentum ad axem O relatum $= P.OG.\text{ſin}.OGP$ $= P.Gg$; et vis $\frac{P.Gg}{f}$ in directione S Q agentis momentum eſt $= \frac{P.Gg}{f} OS$. Aequilibrium ergo aderit ſi ſit $P.Gg = \frac{P.Gg.OS}{f}$, hoc eſt ſi $f = OS = OG + \frac{bb}{OG}$. Erit ergo longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= OG + \frac{bb}{OG}$, ideoque aequalis diſtantiae puncti S, quod centrum oſcillationis appellari ſolet ab axe O. Perinde autem eſt ſiue hoc punctum S in ipſum planum O C G D cadat, ſiue extra illud, eius enim diſtantia ſola ab axe, quae ſemper eſt $= OG + \frac{bb}{OG}$ in computum ingreditur.

§. 29. Si iam hanc methodum ſimili modo ad corpora flexibilia adhibere velimus, ingentem ſtatim difficultatem offendemus in ſitu corporis, quem inter oſcillandum extra ſtatum aequilibrii obtinet. Cum enim eiusmodi corpus nonſolum circa axem fixum O, de quo ſuspenditur, moueri queat, verum etiam circa quamuis flexuram; innumerabilibus modis huiusmodi corpus de ſtatu aequilibrii deturbari poterit; qui cum initio omnes in corpore aeque produci queant, motus oſcillatorii inde prouenientes inter ſe maxime erunt diuerſi. Summa autem anomalia huiusmodi motuum oſcillatoriorum in hoc conſiſtet, quod non ſingulae corporis partes ſimul in ſitum aequilibrii appellant: prouti in caſu praecedente vſu venit. Quando autem non omnes corporis partes ſimul ad ſtatum quietis pertingunt, tum etſi motus reciproci fiunt, tamen oſcillationes diſtincte percipi non poterunt, et hancobrem methodum praecedentem ex aſſumta penduli ſimplicis iſochroni longitudine petitam in vſum voca-

re

re non licebit. Neque vero principia mechanica adhuc ſatis ſunt enoluta, vt ex iis motus iſtiusmodi irregulares, qui prodeunt, ſi corporis partes vtcunque ex ſitu aequilibrii remouentur, ad calculum reuocari atque accurate deſiniri queant: eiusmodi ergo motibus explicandis ſuperſedere debemus.

§. 30. Quantumuis autem hae oſcillationes initio ſint confuſae et irregulares, tamen eae mox, docente experientia, ita ſe ad vniformitatem componunt, vt omnes partes ſimul ad ſtatum aequilibrii pertingant, atque oſcillationes, ſi quidem ſint minimae, cum oſcillationibus penduli ſimplicis comparari queant. Quamobrem corporum flexibilium oſcillantium eas tantum oſcillationes hic inueſtigabimus, quae ſint regulares, et in quibus omnes partes ad ſtatum aequilibrii ſimul accedunt, ſimulque ab eo recedunt. In hoc igitur negotio, antequam longitudo penduli ſimplicis iſochroni deſiniri queat, inquirendum eſt, quantum ſingulae corporis partes a ſuo, quem in aequilibrio tenent, ſitu remoueri debeant, vt ſibi relictae ſimul ad ſtatum aequilibrii perueniant. Scilicet cum corpus ſit flexile, inueſtigari oportet figuram, quam inter oſcillandum induet, vt oſcillationes fiant aequabiles; ſiue cum corpus infinitis modis de ſtatu aequilibrii deturbari queat, in eos modos ante omnia eſt inquirendum, quibus ſingulae partes ſimul iterum ad aequilibrii ſtatum appellunt, eoque oſcillationes aequabiles abſoluunt. Inuenta autem eiusmodi idonea inflexione, quae oſcillationes regulares producat, facile erit longitudinem penduli ſimplicis iſochroni aſſignare.

T 2 §. 31.

§. 31. In hac inueſtigatione, quemadmodum in reſolutione plerorumque problemàtum fieri ſolet, ita verſabimur, vt ſtatum corporis extra ſitum aequilibrii, quem quaerimus, tamquam cognitum ſpectemus, ac ſimul longitudinem penduli ſimplicis iſochroni quaſi cognitam aſſumamus. Tum igitur, quia cuiusuis partis motus, quo ad ſtatum aequilibrii peruenit, eſt cognitus, vis ad motum oſcillatorium producendum requiſita determinari poterit. Inuentis autem viribus, quibus omnes corporis partes ſollicitari oportet, vt ſimul atque illo ipſo tempore, quod aſſumta penduli ſimplicis iſochroni longitudo poſtulat, ad ſtatum aequilibrii appellant, efficiendum eſt, vt iſtae vires viribus, quibus corpus actu ſollicitatur, aequivaleant. Loco illarum igitur virium corpori concipiantur applicatae aequales in directionibus contrariis, haeque cum viribus, quibus corpus actu ſollicitatur, in aequilibrio conſiſtere debebunt Quoniam igitur corpus eſt flexile primo eius inflexio eſt indaganda ab his viribus ſeſe in aequilibrio tenentibus reſultans, ſicque ſtatus corporis extra aequilibrii ſitum determinabitur, tum vero ſimul longitudo penduli ſimplicis iſochroni innoteſcet.

§. 32. Quo autem corpus flexile a potentiis quibuscunque ſollicitatum in aequilibrio verſetur, neceſſe eſt, vt in quauis flexura momenta potentiarum ſe mutuo deſtruant. In caſu igitur propoſito momenta virium ſollicitantium reſpectu cuiusuis flexurae corporis inueſtigari debebunt, quae cum ſe mutuo deſtruant, orientur tot aequationes, quot corpus habet flexuras, ex quibus inflexio corporis, quam in ſingulis flexuris patietur, definietur. Tum vero etiam, ſi corpus fuerit mobile circa axem fixum,

xum, ipſe hic axis flexurae vicem ſuſtinet, eiusque adeo reſpectu omnium potentiarum ſollicitantium momenta ſe deſtruere debent, ex qua aequatione longitudo penduli ſimplicis iſochroni determinabitur. Poterit itaque haec methodus adhiberi ad oſcillationes regulares corporum flexibilium quorumcunque determinandas, ſiue corpus aliquot tantum habeat flexuras, ſiue infinitas quemadmodum euenit in fune ſeu catena perfecte flexili. Caſum autem hunc poſteriorem iam alibi fuſius ſum perſecutus, quare hic potiſſimum caſum priorem, vbi numerus flexurarum eſt finitus, euoluam; quippe in quo conſiſtit quaeſtio initio memorata, quam Celeb. Bernoullius mihi reſoluendam propoſuit; et quae eiusmodi implicatur difficultatibus, quae in altero caſu non deprehenduntur.

§. 33. Sit igitur ex axe horizontali O, quem ad planum chartae normalem concipi oportet, ita vt charta planum verticale repraeſentet, ſuſpenſa virga rigida O A, quam tum inertiae tum etiam grauitatis expertem aſſumamus: hincque virgae in A alligatum ſit corpus A C B D ita, vt non ſolum corpus cum virga circa axem O, ſed etiam ipſum corpus circa flexuram in A liberrime inflecti queat. Corporis igitur ita ſuſpenſi ſtatus aequilibrii erit, dum centrum grauitatis eius G in recta verticali O *b*, hoc eſt in puncto *g* verſatur, atque in hoc ſitu aequilibrii etiam punctum A in eadem recta verticali O *b* puta in puncto *a* ſitum erit; alioquin enim corpus, quia flexile eſt, circa punctum A in aequilibrio perſiſtere non poſſet. Cognito iam ſtatu aequilibrii, manifeſtum eſt corpus ex eo cum rotando circa O tum circa A declinari Fig. 7.

 poſſe.

poſſe. Ponamus ergo corpus ex ſtatu aequilibrii ita deturbari, vt circa axem O per angulum A O α, ſimul vero circa flexuram A per angulum B A β inclinetur: flexuram enim in A ita concipimus, vt corpus circa eam tanquam circa axem horizontalem axi O parallelum gyrari queat. Hoc igitur ſitu punctum A a ſtatu quietis elongatur interuallo A a, centrum grauitatis autem G interuallo Gg, quod componitur ex binis partibus G γ et γ g, quarum illa a motu circa flexuram A, haec vero a motu circa axem O reſultat: vtramque autem elongationem a ſitu naturali infinite paruam aſſumimus.

§. 34. Ponamus iam corpus ſibi relictum ex hoc ſtatu ita ad lineam verticalem O b accedere, vt ſingulae eius partes ſimul ad eum ſitum, quem in ſtatu aequilibrii obtinent, perueniant, quod cum euenerit, motu concepto ſimiliter in alteram regionem corpus excurret, atque oſcillationes aequabiles abſoluet, ſit ergo longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= f$. Dum igitur punctum A in a peruenit percurrendo ſpatiolum A a, centrum grauitatis corporis G in g pertinget, et conficiet ſpatium Gg quae ſpatia etſi ſint curuilinea, tamen inſtar linearum rectarum conſiderari poſſunt. Corpus ergo A C B D perinde in ſtatum aequilibrii perueniet, ac ſi motu angulari ferretur circa axem horizontalem fixum axi O parallelum in puncto V exiſtentem, quod punctum determinatur interſectione rectae G A productae cum verticali O b; tali enim motu puncto A percurrendum eſt ſpatium A a, centro grauitatis G autem ſpatium Gg; prorſus vti ſimultanea appulſio corporis ad ſtatum aequilibrii poſtulat. Spatiola igitur a ſingulis corporis elementis percurrenda

ſunt

ſunt diſtantiis ab axe iſto imaginario per V ducto proportionalia: Hincque vis ad corpus mouendum requiſita ex principiis ante datis determinari poterit.

§. 35. Sit igitur corporis ACBD pondus ſimulque maſſa $= P$, atque per eius centrum grauitatis G traiici concipiatur axis horizontalis ad planum chartae normalis qui proinde cum axi O tum axi imaginario in V erit parallelus; huius reſpectu axis quaeratur momentum inertiae corporis quod ſit $= Pbb$, atque in recta VAG producta capiatur $GS = \frac{bb}{VG}$. Tum in S normaliter applicata concipiatur vis $= \frac{P.Gg}{f}$ ſecundum directionem Ss, erit haec illa ipſa vis ad motum propoſitum producendum requiſita; quae ergo aequiualens eſſe debet vi grauitatis, qua corpus actu ſollicitatur. At directio vis grauitatis eſt recta verticalis GP per corporis centrum grauitatis G ducta, eiusque quantitas aequatur ipſi corporis ponderi $= P$. Hancobrem neceſſe eſt vt vis $\frac{P.Gg}{f}$ in directione Ss applicata aequiualeat vi P in directione GP applicata. Quodſi ergo illa vis animo in ſui contrariam mutari, eiusque loco in directione SQ applicari concipiatur vis $= \frac{P.Gg}{f}$, haec vis cum vi grauitatis P corpus in aequilibrio ita conſeruare debebit, vt neque circa axem O neque circa flexuram in A quicquam inflectatur: ex quo harum duarum virium momenta tam reſpectu axis O quam reſpectu flexurae in A ſe mutuo deſtruant, neceſſe eſt.

§. 36. Conſideremus primo flexuram in A, eritque vis P in directione GP agentis momentum ad hanc flexuram relatum $= P. AG. ſin. AGP = PAG ſin. GVg =$

P.

$\frac{P.AG.Gg}{VG}$; vis autem $\frac{P.Gg}{f}$ in directione S Q vrgentis momentum ad eandem flexuram relatum eſt $= \frac{P.Gg}{f}$. AS $= \frac{P.Gg}{f}(AG + \frac{bb}{VG})$, quae duo momenta vti ſunt contraria, ita etiam aequalia eſſe debent, erit ergo $\frac{P.AG.Gg}{VG} = \frac{P.Gg}{f}(AG + \frac{bb}{VG})$ ſeu $AG.f = AG.VG + bb$. Deinde reſpectu axis fixi in O momentum ex vi P ortum eſt $= P.Gg$, at momentum ex vi $\frac{P.Gg}{f}$ reſultans erit $= \frac{P.Gg}{f}.OAS = \frac{P.Gg}{f}(OA + AG + \frac{bb}{VG})$, ob angulos enim ad O et A infinite paruos directio S Q quoque ad OA productam normalis eſt cenſenda. Ex horum ergo momentorum aequalitate ſequitur $VG.f = OA.VG + AG.VG + bb$. Duae igitur habentur aequationes, quarum altera determinabit rationem inter vtrumque motum rotatorium tam circa O quam circa A faciendum, vt corpus ad oſcillationes aequabiles peragendas accommodetur, hocque fiet determinatione puncti V, altera vero aequatio inſeruiet longitudini penduli ſimplicis iſochroni f inueniendae.

§. 37. Si prior aequatio a poſteriori ſubtrahatur, excedet ratio momenti inertiae corporis ſeu quantitas bb ex calculo eritque $f(VG - AG) = OA.VG$, ſeu $f = \frac{OA.VG}{VA} = OA + \frac{AG}{VA}.OA$. Quodſi ergo ex puncto G ducatur rectae OA parallela, donec verticali O b productae occurrat, exhibebit haec longitudinem penduli ſimplicis iſochroni f. Ceterum ex hac aequatione prodit $VA = \frac{OA.AG}{f - OA}$; prima autem aequatio praebet $VG = \frac{AG.f - bb}{AG} = VA + AG$, ita vt ſit $VA = f - AG - \frac{bb}{AG}$

vnde

vnde eliminanda VA, habebitur $ff = \frac{(OA.AG + AG^2 + hh)f - OA.hh}{AG}$ Ad hanc facilius reſoluendam ponamus $OA = a$; $AG = b$; eritque $ff = \frac{2(ab + bb + hh)f - 2ahh}{2b}$ et $f = \frac{ab + bb + hh \pm \surd((ab + bb)^2 - 2(ab - bb)hh + h^4)}{2b}$. Duplicem igitur valorem pro pendulo f inuenimus, quod indicat duplici modo corpus ita de ſtatu aequilibrii remoueri poſſe, vt oſcillationes regulares efficiat. Erit autem pro hoc duplici valore diſtantia VA $\frac{ab - bb - hh \pm \surd((ab + bb)^2 - 2(ab - bb)hh + h^4)}{2b}$ vnde reperitur $OV = OA - AV = \frac{ab + bb + hh \mp \surd((ab + bb)^2 - 2(ab - bb)hh + h^4)}{2b}$. Ex quibus colligitur fore $f + OV = a + b + \frac{hh}{b}$ et $f - OV = \frac{\pm \surd((ab + bb)^2 - 2(ab - bb)hh + h^4)}{b}$.

§. 38. Commoda hinc deducitur conſtructio, ex Fig. 8. qua cum corporis duplex motus oſcillatorius, tum pro vtroque pendulum ſimplex iſochronum definietur. Conſideretur corpus ACBD in ſtatu quietis, ita vt virga OA et recta AGB ſitum verticalem teneant, eritque $OA = a$, et $AG = b$; ſuper OG tanquam diametro deſcribatur ſemicirculus OFG, et per A ducatur recta AF normalis ad OG erit $AF = \surd ab$. Iam exiſtente momento inertiae corporis vt ante $= Phh$ ſumatur $GR = \frac{hh}{b}$ ita vt R futurum ſit corporis centrum oſcillationis, ſi ex puncto A ſuſpenderetur, ac bifariam ſecetur recta OR in puncto E, erit $OE = RE = \frac{a + b}{2} + \frac{hh}{2b} = \frac{ab + bb + hh}{2b}$, et $AE = \frac{ab - bb - hh}{2b}$ tum ducatur recta EF erit $EF = \frac{\surd((ab + bb - hh)^2 + 4ab^3)}{2b}$

$= \frac{\sqrt{((ab+bb)^2 - 2(ab-bb)bb + b^4)}}{2b}$. Quod ſi ergo centro E radio EF ducatur circulus VFv, eius interſectiones V et v, binos valores rectae OV in praecedente figura exhibebit; ſimul vero hinc longitudo penduli ſimplicis iſochroni f, definitur. Scilicet ſi corpus vel circa V vel v de ſtatu quietis deturbatur vtroque caſu oſcillationes regulares conficiet, ac priori caſu longitudo penduli ſimplicis iſochroni erit $f = Ov$, poſteriori caſu erit $f = OV$.

§. 39. Sit corpus virga recta AB ex materia vniformi facta, erit eius centrum granitatis in puncto medio G, ita vt longitudo virgae futura ſit $AB = 2b$, tum autem erit $hh = \frac{1}{3} bb$; ideoque $f = \frac{a}{2} + \frac{2}{3} b \pm \sqrt{(\frac{1}{4} aa + \frac{1}{3} ab + \frac{9}{4} bb)}$ et $OV = \frac{a}{2} a + \frac{2}{3} b \mp \sqrt{(\frac{1}{4} aa + \frac{1}{3} ab + \frac{9}{4} bb)}$. Ex his manifeſtum eſt, ſi longitudo virgae AB fuerit valde exigua reſpectu longitudinis $OA = a$, fore vel $f = a + b + \frac{bb}{3a}$ et $OV = \frac{1}{3} b - \frac{bb}{3a}$, vel in altero caſu $f = \frac{1}{3} b - \frac{bb}{3a}$ et $OV = a + b + \frac{bb}{3a}$; priori ergo caſu corpus circa O quaſi corpus rigidum oſcillabitur, poſteriori vero circa ſuum centrum oſcillationis, quod habet reſpectu axis O, quae adeo oſcillationes celerrime abſoluentur Sit autem $AB = \frac{12}{7} OA$, ſeu $b = \frac{6}{7} a$, erit vel $f = 2a$ et $OV = \frac{1}{7} a$; vel $f = \frac{1}{7} a$ et OV
Fig. 9. $= 2a$. Priori igitur caſu virga AB inter oſcillandum eum ſitum tenebit, quem figura indicat, rotabitur ſcilicet circa punctum V exiſtente $OV = \frac{1}{7} Oa$; eritque penduli ſimplicis iſochroni longitudo $= OF = 2 Oa$.
Fig. 10. Poſteriori caſu virga AB inter oſcillandum eum tenebit ſitum, quem figura 10 indicat, gyrabitur nimirum circa

pun-

punctum V exiſtente $OV = 2\,Oa$ et longitudo penduli ſimplicis iſochroni erit $OF = \frac{1}{7}\,Oa$. Quod ſi autem virga AB cum filo Oa tanquam corpus rigidum oſcillaretur foret longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= a + b + \frac{bb}{a+b} = \frac{181}{91}\,Oa$ quae vna parte $\frac{1}{91}$ minor eſt quam caſu priori.

§. 40. Sit corpus ACBD globus ex materia vniformi confectus, qui in puncto A virgae ſeu filo rigido grauitatis experti OA ita ſit alligatus vt circa flexuram in A rotari poſſit. Erit ergo centrum grauitatis G in centro globi, et globi radius $AG = b$; porro autem momentum inertiae globi ita eſt comparatum, vt ſit $bb = \frac{2}{5}\,bb$. Erit itaque $f + OV = a + b + \frac{bb}{b} = a + \frac{7}{5}\,b$ et $f - OV = \pm \surd\,(aa + \frac{6}{5}\,ab + \frac{49}{25}\,bb)$ ergo $f = \frac{1}{2}\,a + \frac{7}{10}\,b \pm \frac{1}{10}\,\surd\,(25\,aa + 30\,ab + 49\,bb)$ et $OV = \frac{1}{2}\,a + \frac{7}{10}\,b \mp \frac{1}{10}\,\surd\,(25\,aa + 30\,ab + 49\,bb)$ Sin autem globus filo OA firmiter eſſet affixus, vt in A nulla inflexio fieri queat, tum foret longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= a + b + \frac{bb}{a+b} = a + b + \frac{2\,bb}{5\,(a+b)}$; atque ſi radius globi b reſpectu a fuerit valde paruus, erit iſtud pendulum $= a + b + \frac{2\,bb}{5\,a} - \frac{2\,b^3}{5\,aa}$. Caſu autem quo flexura in A exiſtit erit longitudo penduli pro ſuperiori ſigno $f = a + b + \frac{2\,bb}{5\,a} - \frac{6\,b^3}{25\,aa}$; at pro inferiori erit $f = \frac{2}{5}\,b - \frac{2\,bb}{5\,a} + \frac{6\,b^3}{25\,aa}$; atque hoc poſteriori caſu circa punctum in ipſo globo ſumtum gyrabitur. Priori autem caſu oſcillationes fere congruunt cum iis, quae fierent, ſi in A nulla eſſet flexura; lentiores tamen erunt paulisper, quoniam pendulum iſochronum longius eſt parte $\frac{4\,b^3}{25\,aa}$; quod diſcrimen in experimentis capien-

Fig. 7.

 dis

dis probe notari debet. Ceterum etſi filum OA eſt flexile, dummodo ſit tenuiſſimum, inter oſcillandum in directum manebit extenſum.

Fig. 11. §. 41 Quo hoc clarius pateat ſubſtituamus loco fili rigidi OV, cui corpus eſt alligatum, funem ſeu catenam OA perfecte flexilem, ſimulque naturaliter grauem. Manifeſtum ergo eſt hunc funem inter oſcillandum incurvatum iri, cuius proinde curuatura ante inueſtigari debet, quam motum oſcillatorium definire liceat. Sit igitur OMA illa curua quam funis inter oſcillandum format, atque corpus AB gyretur circa punctum V. Ponatur corporis AB pondus $= P$, eiusque momentum reſpectu axis horizontalis per centrum grauitatis G ducti atque axi O paralleli $= Pbb$. Quod ſi iam capiatur $GS = \frac{bb}{VG}$, vis requiſita ad motum oſcillatorium in corpore AB generandum erit $= \frac{P \cdot Gg}{f}$, applicanda in puncto S normaliter ad AB ſcilicet in directione Ss. At ob rationes ſupra allegatas hanc eandem vim in directione contraria SQ applicatam concipiamus. Deinde quaeuis funis particula x, cuius maſſa ſit $= dp$ percurrere debet ſpatiolum xt tempore longitudini penduli ſimplicis f conformi, ideoque neceſſe eſt, vt in directione xt vrgeatur vi $= \frac{xt \cdot dp}{f}$; hanc vero pariter in directione contraria xz applicatam ponemus; vt omnes iſtae vires cum viribus corpus et funem actu ſollicitantibus in aequilibrio conſiſtere debeant.

§ 42. Incipiamus a flexura A in quam agunt vis grauitatis corporis P in directione GP et vis $\frac{P \cdot Gg}{f}$ in directione SQ, illius momentum eſt $= \frac{P \cdot AG \cdot Gg}{VG}$, huius vero momentum eſt $= \frac{P \cdot Gg}{f} AS = \frac{P \cdot Gg}{f}(AG + \frac{bb}{VG})$ vnde erit

erit $AG \cdot f = AG \cdot VG + bb$. Cum iam funis in ſingulis punctis ſit flexilis, conſideremus eius punctum quodcunque M, in quod non ſolum vires corpus AB ſollicitantes agunt, ſed etiam vires, quibus ſingula elementa portionis funis MA vrgentur. A vi quidem P in directione GP oritur momentum reſpectu flexurae in M $= P(Gg - Mm)$; a vi autem $\frac{P.Gg}{f}$ in directione SQ oritur momentum in contrariam plagam tendens $= \frac{P.Gg}{f}$ $(MA + AG + \frac{bb}{VG})$. Conſideretur iam funis elementum quoduis $x = dp$, a cuius ponduſculo naſcitur momentum pro $M = dp(tx - Mm) = xy.dp$; quarum omnium per MA ſumma eſt $= \int tx.dp - Mm.\int dp$. Ex vi autem $xz = \frac{xt.dp}{f}$, oritur momentum $= \frac{xt.Mx.dp}{f} = \frac{xt.dp}{f}(AM - Ax)$ quorum omnium ſumma eſt $= \frac{AM}{f}\int xt.dp - \frac{1}{f}\int xt.at.dp$ quae integralia ab A vsque ad M ſumi debent. Quia igitur omnia momenta pro flexura M orta ſe deſtruere debent erit P $(Gg - Mm) + \int tx.dp - Mm.\int dp = \frac{P.Gg}{f}$ (MA + AG $+ \frac{bb}{VG} + \frac{AM}{f}\int xt.dp - \frac{1}{f}\int xt.at.dp$, ſumimus autem hic promiſcue am loco curuae AM, quia aberratio a linea recta eſt infinite parua.

§. 43. Cum autem ex flexura in A ſit $\frac{P.AG.Gg}{VG}$ $= P(Gg - Aa) = \frac{P.Gg}{f}(AG + \frac{bb}{VG})$ erit pro flexura in M, $P(Aa - Mm) + \int tx.dp - Mm\int dp = \frac{P.MA.Gg}{f} + \frac{AM}{f}\int xt.dp - \frac{1}{f}\int xt.at.dp$. Ponamus iam $am = x$; $Mm = y$, pondus funis $MA = p$; $Oa = a$, $Aa = c$; erit $AM = am = x$; $\int dp = p$; $\int xt.dp = \int y\,dp$; et $\int xt.at.dp = \int xy\,dp$. Ponatur porro VA

 =

$= \sqrt{a} = k$, et AG $= b$; erit VG $= b + k$ et Gg $= \frac{c(b+k)}{k}$; eritque primo pro flexura in A; $bf = bb + bk + bb$; atque pro flexura M erit $Pc - Py + \int y\,dp - yp = \frac{Pcx(b+k)}{fk} + \frac{x}{f}\int y\,dp - \frac{1}{f}\int xy\,dp$; ſeu P $(c - y) - \int p\,dy = \frac{Pcx(b+k)}{fk} + \int \frac{dx}{f}\int y\,dp$, vbi notandum eſt, ſi $x = 0$ fieri $y = c$ et ſi $x = a$, ſit $y = 0$. Sumantur autem differentialia vt prodeat $-P\,dy - p\,dy = \frac{Pc\,dx(b+k)}{fk} + \frac{dx}{f}\int y\,dp$. Sumtisque denuo differentialibus poſito dx conſtante habebimus: $-P\,ddy - p\,ddy - dy\,dp = \frac{y\,dx\,dp}{f}$; quae eſt aequatio pro curuatura funis O M A.

§. 44. Si funis grauitas euaneſcat, vel corpus P ſit quaſi infinitum reſpectu ponderis funis p, tum fiet $ddy = 0$, funique in directum extendetur, ita vt ſit $y = \frac{c(a-x)}{a}$, vti ſupra notauimus. Sin autem funis ad corpus finitam habeat rationem, ponamus funem vniformis craſſitiei, vt ſit p ipſi x proportionale, ſitque $p = nx$: atque habebimus $0 = P\,ddy + nx\,ddy + n\,dx\,dy + = \frac{ny\,dx^2}{f} = 0$. Sumatur pro aequatione integrali

$$y = c + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \zeta x^6 + \text{etc. erit}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\beta P + 6\gamma Px + 12\delta Px^2 + 20\varepsilon Px^3 + 30\zeta Px^4 + 42\eta Px^5 \text{ etc.} \\ \quad + 2\beta nx + 6\gamma nxx + 12\delta nx^3 + 20\varepsilon nx^4 + 30\zeta nx^5 \text{ etc.} \\ + \alpha n + 2\beta nx + 3\gamma nx^2 + 4\delta nx^3 + 5\varepsilon nx^4 + 6\zeta nx^5 \text{ etc.} \\ + \frac{nc}{f} + \frac{\alpha nx}{f} + \frac{\beta nx^2}{f} + \frac{\gamma nx^3}{f} + \frac{\delta nx^4}{f} + \frac{\varepsilon nx^5}{f} \text{ etc.} \end{array}\right\} = 0$$

hinc ergo erit $2\beta P = -\alpha n - \frac{nc}{f}$; $6\gamma P = -4\beta n - \frac{\alpha n}{f}$; $12\delta P = -9\gamma n - \frac{\beta n}{f}$; $20\varepsilon P = -16\delta n - \frac{\gamma n}{f}$ etc. At ex aequatione $-P\,dy - p\,dy = \frac{Pc\,dx(b+k)}{fk} + \frac{dx}{f}\int y\,dx$ intelligitur, ſin $x = 0$, fore ob $p = 0$ et $\int y\,dx = 0$; $dy = -$

cdx

$\frac{cdx(b+k)}{fk} = \alpha dx$; ita vt ſit $\alpha = -\frac{c(b+k)}{fk}$; hinc erit $\beta = \frac{bcn}{2Pfk}$; $\gamma = -\frac{bcun}{3PPfk} + \frac{nc(b+k)}{6Pffk}$, etc. Inuentis coeffi-cientibus ponatur $x = a$, et $y = 0$, habebiturque aequatio inuoluens incognitas f et k, quae cum aequatione $bf = bb + bk + bb$ coniuncta vtramque determinabit.

§. 45. Sit pondus corporis P valde magnum, vt termini, in quorum denominatoribus P plures vna habet dimenſiones reiici queant, eritque $y = c - \frac{cx(b+k)}{fk} + \frac{nbcxx}{2Pfk} + \frac{ncx^3(b+k)}{6Pffk}$; ponatur $x = a$, vt fiat $y = 0$ erit $1 - \frac{a(b+k)}{fk} + \frac{naab}{2Pfk} + \frac{na^3(b+k)}{6Pffk} = 0$. Sit funis pondus $na = F$ erit $6Pffk - 6Paf(b+k) + 3Fabf + Fa^2(b+k) = 0$; vnde ob P valde magnum $f = \frac{a(b+k)}{k} + \frac{Fa(3b+k)}{6Pk} = b + k + \frac{bb}{v}$ ex qua aequatione k indeque f definientur. Cum autem in puncto A ſit $\frac{cdx}{dy} = -\frac{fk}{b+k}$, erit ob $Aa = c$ ſubtangens curuae in $A = \frac{fk}{b+k}$: ex ſub tangente ergo curuae in A cognita cum aequatione $f = b + k + \frac{bb}{v}$ innoteſcunt f et k. Si corpus appenſum P penitus euaneſcat prodibunt oſcillationes funis ſuſpenſi perfecte flexilis, quae eaedem deprehendentur, quas iam ante aliquot annos in Comment. Acad. Petropolitanae Cel. Bernoulli et ego inuenimus.

§. 46. Quemadmodum filum OA primum inertiae Fig. 12.
et grauitatis expers deinde graue quidem at perfecte flexile poſuimus, ita nunc loco OA ſubſtituamus corpus quodcunque graue et rigidum, quod circa O liberrime rotari queat, in A autem aliud corpus pariter rigidum et graue AB ita habeat connexum, vt id quoque circa flexuram in A liberrime inflecti queat. Sit corporis O

A

A centrum grauitatis in E, corporis A B autem in F eritque vtrumque corpus in aequilibrio, ſi centra grauitatis E et F fuerint in recta verticali Ob in punctis e et f ſita. Habeat hoc corpus inter oſcillandum ſitum quem figura repraeſentat, ita vt corpus O A circa axem O per angulum A Oa, corpus autem A B circa axem imaginarium L per angulum B Lb a ſtatu aequilibrii ſit remotum: e quo ſitu vi grauitatis ita deſcendat, vt corpus O A circa axem O, corpus vero A B circa L rotando ſimul ad ſitum aequilibrii perueniant; ſitque longigitudo penduli ſimplicis iſochroni $= f$. Ponatur corporis O A pondus, quo in directione verticali El vrgetur $=$ P, corporis vero A B pondus, quo in directione verticali Fm ſollicitatur, $=$Q; atque exprimente P et Q ſimul maſſas horum corporum.

§. 47. Per vtriusque corporis centrum grauitatis tranſire concipiatur axis horizontalis axi O parallelus, atque ſit corporis O A momentum inertiae reſpectu axis E$=$Pbb; corporis autem A B momentum inertiae reſpectu axis F ſit $=$Qii. Quia iam corpus O A circa axem O rotatur, eiusque centrum grauitatis E interuallo Ee a ſtatu aequilibrii diſtat, erit vis ad motum oſcillatorium in eo producendum requiſita $= \frac{P.Ee}{f}$, quae normaliter ad B A in directione Rr eſt applicanda exiſtente E R $= \frac{bb}{OE}$; hanc vero vim $\frac{P.Ee}{f}$ in directione oppoſita Rϱ applicatam concipiemus. Simili modo cum corporis A B centrum grauitatis F diſtet a ſuo aequilibrii ſitu f interuallo Ff, erit vis ad motum oſcillatorium in eo producendum requiſita $= \frac{Q.Ff}{f}$, et quoniam hoc corpus circa axem imaginarium L oſcillando rotatur, vis iſta

iſta in puncto S ſecundum directionem ad AB normalem $S s$ eſt applicanda, ſumto interuallo $FS = \frac{ii}{LF}$, hanc ergo vim in directione oppoſita $S\sigma$ applicatam concipiemus. Hic quantitates incognitae ergo ſunt longitudo penduli ſimplicis iſochroni f et poſitio puncti L.

§. 48. Vires igitur quibus corpus hoc oſcillans in aequilibrio conſeruari debet ſunt primo pondera P et Q in directionibus El et Fm ſollicitantia, deinde vires $\frac{P.Ee}{f}$ et $\frac{Q.Ff}{f}$ in directionibus $R\varrho$ et $S\sigma$ vrgentes. Momenta ergo harum virium cum reſpectu flexurae A tum reſpectu axis O ſe inuicem deſtruere debebunt. In flexuram A autem agunt vires Fm et $S\sigma$, quarum momenta ſunt $Q(Ff - Aa)$ et $\frac{Q.Ff}{f}.AS = \frac{Q.Ff}{f}(AF + \frac{ii}{LF})$, eritque ideo $f(Ff - Aa) = Ff(AF + \frac{ii}{LF})$. Cum autem ſit $Ff : Aa = LF : LA$ erit $f.AF = AF.LF + ii$. In axem O autem agunt omnes vires Fm, El, $S\sigma$ et $R\varrho$: eritque momentum vis $Fm = Q.Ff$; vis $El = P.Ee$; vis $S\sigma = \frac{Q.Ff}{f}(OA + AS) = \frac{Q.Ff}{f}(OA + AF + \frac{ii}{LF})$; vis $R\varrho = \frac{P.Ee}{f}OR = \frac{P.Ee}{f}(OE + \frac{bb}{OE})$. Ex his ergo naſcetur aequatio $Q.Ff + P.Ee = \frac{Q.Ff}{f}(OA + AF + \frac{ii}{LF}) + \frac{P.Ee}{f}(OE + \frac{bb}{OE})$. Cum autem ſit $Ff : Aa = LF : LA$ et $Aa : Ee = OA : OE$ erit componendo $Ff : Ee = OA.LF : OE.LA$: eritque ideo $Q.OA.LF.f + P.OE.LA.f = Q.OA^2.LF + Q.OA.AF.LF + Q.OA.ii + P.OE^2.LA + P.LA.bb$.

§. 49. Ponamus $OA = a$; $OE = \alpha$; $AB = b$; $AF = \beta$; et $OL = x$ erit ob angulos ad O et L minimos, $AL = a - x$; $LF = a + \beta - x$: qui valores in

 pri-

prima aequatione ſubſtituti dant $\beta f = a\beta + \beta^2 - \beta x + ii$ in altera vero $Qa^2 f + Qa\beta f - Qafx + Pa\alpha f - P\alpha fx = Qa^3 + 2Qa^2\beta - Qa^2 x + Qa\beta^2 - Qa\beta x + Qaii + Pa\alpha^2 - P\alpha^2 x + Pabb - Pbbx$. Ex priori aequatione habetur $f = a + \beta - x + \frac{ii}{\beta}$; qui valor in poſteriori ſubſtitutus dat $P\alpha xx + Qaxx + P\alpha^2 x - 2Pa\alpha x - P\alpha\beta x - \frac{P\alpha iix}{\beta} + Pbbx - Qa^2 x - Qa\beta x - \frac{Qaiix}{\beta} + Pa^2\alpha - Pa\alpha^2 + Pa\alpha\beta + \frac{Pa\alpha ii}{\beta} - Pabb + \frac{Qa^2 ii}{\beta} = 0$. Quae aequatio, cum duas radices contineat, indicat corpus duplici modo ad oſcillationes aequabiles abſoluendas impelli poſſe; hincque vterque modus non ſolum cognoſcitur, ſed etiam pro vtroque longitudo penduli ſimplicis iſochroni reperitur. Si ponatur $P = 0$, tum prodibit caſus ante pertractatus, vbi virgam OA inertiae ac grauitatis expertem aſſumſimus; ſin autem ſit $Q = 0$, ita vt corpus inferius AB vel euaneſcat vel ſuam inertiam ſimulque grauitatem amittat, fiet vel $x = a$ vel $x = a - \alpha + \beta + \frac{ii}{\beta} - \frac{bb}{\alpha}$, priori caſu nullus fit motas circa axem O, poſteriori vero exhibetur motus oſcillatorius ordinarius, ſitque longitudo penduli ſimplicis iſochroni $f = \alpha + \frac{bb}{\alpha}$.

Fig. 13. §. 50. Simili modo intelligitur, quemadmodum ratiocinium ſit inſtituendum, ſi plura corpora rigida ita ſint connexa, vt circa quamque flexuram motus exiſtere poſſit. Ponamus ergo tria corpora OA, AB, et BC hoc modo eſſe connexa, quorum ſupremum OA circa axem horizontalem O immediate mobile ſit, ſeu quod eodem redit habeat corpus OABC duas flexuras in A et B, circa quas eius partes inferiores ſint mobiles. Repraeſentet

tet figura eum ſitum, ex quo corporis ſingulae partes ad ſtatum aequilibrii ſimul perueniant, ſitque longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= f$. Suprema quidem pars OA aliter niſi circa axem O moueri nequit; at partem ſecundam AB gyrari ponamus circa axem horizontalem imaginarium in L: eruntque diſtantiae OL, OM cum longitudine penduli ſimplicis iſochroni f tres quantitates incognitae per aequationes determinandae. Ponamus porro partis OA pondus $= P$ eiusque centrum grauitatis in E: partis AB pondus ſit $= Q$, eiusque centrum grauitatis in F, partis autem BC pondus ſit $= R$, eiusque centrum gravitatis in G: ducantur verticales El, Fm, Gn quae exprimant ſollicitationes ab his ponderibus ortas.

§. 51. Per ſingularum harum partium centra grauitatis tranſire concipiantur axes horizontales axi in O paralleli: eorumque reſpectu quaerantur momenta inertiae: ſit igitur partis OA momentum inertiae reſpectu axis $F = Qii$, et partis BC momentum inertiae reſpectu axis $E = Pbb$; AB momentum inertiae reſpectu $G = Rkk$. His cognitis capiantur $ER = \frac{bb}{OE}$; $FS = \frac{ii}{LF}$; $GT = \frac{kk}{MG}$; erunt puncta R, S, T illa loca, vbi applicitae concipi debent vires $R\varrho$; $S\sigma$; $T\tau$, quae ex acceleratione corporis oriuntur Cum autem centrum grauitatis E interuallo Ee diſtet a ſtatu aequilibrii, centrum grauitatis G interuallo Gg, erit vis $R\varrho = \frac{P.Ee}{f}$; vis $S\sigma = \frac{Q.Ff}{f}$ et vis $T\tau = \frac{R.Gg}{f}$. Iſtae igitur tres vires effectum trium praecedentium virium Fl, Fm, et Gn deſtruere, atque corpus in aequilibrio conſeruare debent; Hinc momenta quae ex illis viribus pro flexuris B, A et O naſcuntur aequalia eſſe debent momentis quae ex iſtis viribus reſultant.

§. 52. Ex viribus autem El, Fm, et Gn ſequentia emergunt momenta: Scilicet pro flexura B eſt momentum $=R(Gg-Bb)=\frac{R.Gg.BG}{MG}$, pro flexura A eſt momentum $=R(Gg-Aa)+Q(Ff-Aa)$; et pro ipſo axe O eſt momentum $=R.Gg+Q.Ff+P.Ee$. At ex viribus Rϱ, Sσ, et Tτ oriuntur momenta in partem contrariam vrgentia; erit autem pro flexura B momentum $=\frac{R.Gg}{f}(Bg+\frac{kk}{MG})$; pro flexura A momentum eſt $=\frac{R.Gg}{f}(AB+BG+\frac{kk}{MG})+\frac{Q.Ff}{f}(AF+\frac{ii}{LF})$ denique pro axe ipſo O eſt momentum $=\frac{R.Gg}{f}(OA+AB+BG+\frac{kk}{MG})+\frac{Q.Ff}{f}(OA+AF+\frac{ii}{LF})+\frac{P.Ee}{f}(OE+\frac{hh}{OE})$. Hinc igitur orientur tres ſequentes aequationes

$$R(Gg-Bb)=\frac{R.Gg}{f}(BG+\frac{kk}{MG})$$

$$R(Gg-Aa)+Q(Ff-A\alpha)=\frac{R.Gg}{f}(AB+BG+\frac{kk}{MG})+\frac{Q.Ff}{f}(AF+\frac{ii}{LF})$$

$$R.Gg+Q.Ff+P.Ee=\frac{R.Gg}{f}(OA+AB+BG+\frac{kk}{MG})+\frac{Q.Ff}{f}(OA+AF+\frac{ii}{LF})+\frac{P.Ee}{f}(OE+\frac{hh}{OE})$$

Ex quibus tribus aequationibus primum puncta L et M ac deinceps longitudo penduli ſimplicis iſochroni f determinabitur.

§. 53. Prima aequatio ob $Gg:Bb=MG:MB$ abit in hanc $BG.f=BG.MG+kk$: Atque ſi a ſecunda prima auferatur remanebit iſta $R(Bb-Aa)+Q(Ff-Aa)=\frac{R.AB.Gg}{f}+\frac{Q.Ff}{f}(AF+\frac{ii}{LF})$. Eſt autem $Bb-Aa=\frac{AB.Aa}{LA}$; $Ff-Aa=\frac{AF.Aa}{LA}$; et $Ff=\frac{LF.Aa}{LA}$; $Bb=\frac{LB.Aa}{LA}$ atque $Gg=\frac{LB.MG.Aa}{LA.MB}$, ex quibus haec ſecunda aequatio reſultat, $R.AB.f+Q.AF.f=\frac{R.AB.LB.MG}{MB}+Q.AF.LF$

$+Q.$

$+ Q.ii$. Subtrahatur ſecunda aequatio a tertia ac remanebit: $R.Aa + Q.Aa + P.Ee = \frac{R.OA.Gg}{f} + \frac{Q.OA.Ff}{f} + \frac{P.Ee}{f}\left(OE + \frac{bb}{OE}\right)$. Verum eſt $Aa = \frac{OA.Ee}{OE}$, $Ff = \frac{OA.LF.Ee}{OE.LA}$, et $Gg = \frac{OA.LB.MG.Ee}{OE.LA.MB}$, ex quibus naſcitur ſequens aequatio tertia; $R.OA.f + Q.OA.f + P.OE.f = \frac{R.OA^2.LB.MG}{LA.MB} + \frac{Q.OA^2.LF}{LA} + P.OE^2 + P.bb$. Habemus ergo tres aequationes inter quantitates finitas tam cognitas quam incognitas, quoniam eliminauimus quantitates infinite paruas Ee, Aa, Ff, Bb, et Gg, ex quibus formari poterit aequatio inter f et cognitas, quae erit trium dimenſionum atque indicat, triplici modo corpus OABC duabus flexuris praeditum ad oſcillationes aequabiles peragendas incitari poſſe.

§. 54. Quodſi corpus oſcillans plures quam duas habeat flexuras, circa quae aeque ac circa axem O motus rotatorius exiſtere queat. Simili modo tam inflexio ad oſcillationes aequabiles producendas neceſſaria, quam longitudo penduli ſimplicis iſochroni definiri poterit. Obtinentur enim tot aequationes, quot ſunt flexurae ipſo axe O quoque pro flexura computato, ex quibus primo axes imaginarii, circa quae partes inferiores gyrantur definiri poterunt, quorum numerus vnitate minor eſt, quam numerus aequationum; ita vt vna aequatio ſuperſit longitudinem penduli ſimplicis iſochroni exhibens. Haec autem aequatio eliminatis poſitionibus axium illorum imaginariorum aſcendet ad tot dimenſiones, quot fuerint flexurae axe O quoque pro vna flexura computato, vnde colligendum eſt, eiusmodi corpus tot variis modis ad oſcillationes vniformes abſoluendas impelli poſſe, quot contineat

tineat partes flexuris inter ſe iunctas. Pariter ſcilicet haec oſcillationum ratio eſt comparata, acſi filo inertiae et grauitatis experti plura corpuſcula fuerint alligata; quae etiam tot variis modis oſcillationes vniformes peragere poſſunt, quot fuerit ponduſcula. Neque vero iſte caſus ab eo, quem hic tractauimus, aliter diſcrepat, niſi quod hic corpora flexuris inuicem connexa finitae magnitudinis aſſumſimus, dum ea ibi infinite parua poſſuimus: ex quo neceſſe eſt, vt ille caſus in hoc comprehendatur: formulae autem atque aequationes hic inuentae ad hyppotheſin corpusculorum infinitae paruorum accommodabuntur, ſi quantitates hh, ii, kk euaneſcant.

DE

DE SONIS MVLTIFARIIS QVOS LAMINAE ELASTICAE DIVERSIMODE EDVNT DISQVISITIONES MECHANICO-GEOMETRICAE EXPERIMENTIS ACVSTICIS ILLVSTRATAE ET CONFIRMATAE.

AVCTORE
Daniele Bernoulli.

§ 1.

Poſtquam haud ita pridem cum Academia communicaui, quae circa vibrationes et ſonos laminarum elaſticarum iam a multis annis meditatus fueram (*), non deſii; hoc argumentum ruminari et ſub alia atque alia facie conſiderare, hisque inquiſitionibus intento, tot egregiae ſe mihi obtulerunt proprietates, vt operae praetium duxerim, ſingulas ad experimenta reuocare, vti vel ii, qui calculos noſtros proſequi non valent, noua tamen theoremata noſtra recte intelligere queant, praeſertim cum fieri non poſſit, quin in huiuscemodi argumentis ad phyſicas quandoque ducamur hypotheſes, de quarum veritate ſola teſtatur experientia Phyſici eſt primo modum excogitare mechanicum, quo phaenomenon cuius explicatio deſideratur, fieri poſſit, tum demum ex intimis Geometriae et Mechanicae penetralibus rerum ſingularum menſuras deducere ac denique menſuras calculo inuentas cum menſuris quas experimenta indicant comparare, quae ſi inter ſe conueniant, vltimum certitudinis

(*) vid. ſupra diſſ. *De vibrationibus et ſono laminarum elaſticarum.*

tudinis gradum, qui in phyſica haberi poteſt, theoriae addunt, idque non ſolum in rebus, quas experimenta confirmarunt, ſed in omnibus etiam reliquis, quae ratiocinio geometrico ex theoria defluunt, etiamſi ſaepe talis ſunt indolis, vt experimenta non admittant.

§. II. Vibrationes in genere in duas claſſes reduco, eas ſcilicet, quae ita lente fiunt, vt eas viſu diſtinguere atque ſic ad datum tempus numerare liceat, et eas quae ita ſunt celeres, vt ſolo auditu diſtingui poſſint ex ſono quem generant: theoria noſtra omnes et ſingulas definit, vti ex prima noſtra diſſertatione apparet, vbi etiam circa vtramqre vibrationum claſſem experimenta attuli. In ſequentibus vero dicam tantum de vibrationibus quae ſonum faciunt, quia maior inde vtilitas provenit, eaque phyſicae pars, quae acuſtica dicitur, haud parum perficitur.

§. III. Plurimi ſunt modi, quibus a lamina elaſtica ſonus elici poteſt: Praecipuos hic exponam:

Modus primus eſt, quum lamina elaſtica muro vel alii obiecto firmo altera ſui extremitate infigitur atque ſic vibratur. Hunc vero proſecutus ſum in prima diſſertatione.

Modus ſecundus eſt, cum laminae elaſticae e filo ſuspenſae percutiuntur; ad hunc vero modum infinitos pertinere alios ex infra dicendis patebit. Notandum autem eſt in anteceſſum laminas percuſſas ſonum diſtinctum non edere, niſi ſint craſſiusculae.

Modus tertius eſt, cum laminae ambabus ſuis extremitatibus duobus planis parallelis perpendiculariter infixae vibrantur aut percutiuntur.

Modus

Modus quartus eſt, cum ambae extremitates praedictis planis non quidem ſunt infixae ſed innituntur ſaltem.

Denique *Modi mixti* dantur quam plurimi.

§. IV. Laminae elaſticae dum oſcillationes ſuas perficiunt incuruantur, quae curuatura ante omnia determinanda eſt: quocunque autem modo vibrentur, quamuis infinitis modis inter oſcillandum inflectantur, attamen curuatura earundem perpetuo vna eademque aequatione definitur: aequatio nempe inter abſciſſas x et applicatas y haec eſt poſita dx conſtante:

$$d^4 y = \frac{G}{m^4 c} y\, dx^4 \text{ ſiue breuius } f^4 d^4 y = y\, dx^4$$

hancque aequationem in prima diſſertatione §. IV. ex principiis mechanicis deduxi, quod ſi autem calculus loco citato inſtitutus examinetur, apparebit eundem valere pro omnibus oſcillationum modis. Quia vero praefata aequatio eſt quarti ordinis, ideo quatuor inuoluit arbitrarias conſtantes, quae vero pro quouis oſcillationum exemplo ita ſunt ſeligendae vt problematis conditionibus ſatisfiat.

§. V. Prouti curuatura laminarum pro omni oſcillationum genere vniuerſaliſſime definiri poteſt, ita et expreſſio generaliſſima pro pendulo ſimplici cum oſcillationibus laminae iſochronis vbique eadem inſeruit: hanc expreſſionem §. VIII. ſuperioris diſſertationis inuenimus, ſi ſcilicet deſiderata longitudo penduli dicatur L, oſtendimus fore ſemper

$$L = \frac{g f^4}{m^4}$$

in qua expreſſione littera g denotat vim grauitatis, quae proinde ſi multiplicetur per longitudinem laminae l ex-

primat pondus eiusdem laminae: atque ſi pondus laminae longitudinis l dicatur p erit $g\,l = p$. Tum vero inſuper oſtendi §. VII. litteram f proportionalem eſſe longitudini laminae l et rationem inter f et l erui poſſe ope alicuius aequationis, quae tamen radices infinitas contineat, quarum quaeuis pro alio atque alio caſu eiusdem generis oſcillationum inſeruiat. Denique quantitatem m^4 indicani pendere ab elaſticitate abſoluta laminae elaſticae Haec poſtquam ita erueram, ſollicitus fui de modo quo quantitas m^4 experimento definiri poſſet: nec enim notio clara aequationum haberi poteſt priusquam quantitates omnes ſpecifice determinatae fuerint, ita vt ſolae res homogeneae inter ſe comparentur; huic itaque diſquiſitioni indulgens ſequens mentem ſubiit experimentum, quod hic ex praemiſſa diſſertatione deſcribam.

Tab. IV. fig. 2. *Experimentum.* Laminam BD longitudinis l infixi verticaliter lacunari eiusque extremitati pondus P appendi, quod mediante trochlea R et funiculo E R P laminam horizontaliter trahens eandem incuruabat in ſitum BGE; tumque diſtantiam D E exacte menſurabam; quod ſi nunc dicatur diſtantia D E = C, pondus appenſum P, inueni §. IX primae diſſertationis

$$m^4 = \frac{P\,l^3}{3\,C}$$

atque hoc valore ſubſtituto in expreſſione penduli ſimplicis inuenitur $L = \frac{3\,g\,f^4}{P\,l^3} \times C$, atque ſi porro pondus laminae longitudinis B D ſit $= p$, erit $g\,l = p$ et $g = \frac{p}{l}$ hocque valore rurſus ſubſtituto, habetur

$$L = \frac{3\,p}{P} \times \frac{f^4}{l^4} \times C$$

quae iam expreſſio quantitates pure homogenes inuoluit, cum

cum ratio $\frac{f}{l}$ deinceps aequatione pure numerica definiri poſſe oſtendetur.

§. VI. Redeamus nunc ad aequationem differentialem quarti ordinis qua curuatura laminarum vibratarum in omni caſu exprimitur: aequatio nempe haec eſt

$$f^4\, d^4 y = y\, d x^4$$

quae ante omnia ad quantitates finitas reducenda eſt. Id vero fieri poteſt duobus modis, integratione nimirum per ſeries et integratione abſoluta; aequatio per ſeries reſultans vi §. VII. primae diſſertationis talis eſt

$$y = \begin{array}{l} \alpha\left(1 + \frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\, f^4} + \frac{x^8}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\, f^8} + \text{etc.}\right) \\ + \beta\left(\frac{x}{f} + \frac{x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\, f^5} + \frac{x^9}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\, f^9} + \text{etc.}\right) \\ + \gamma\left(\frac{xx}{ff} + \frac{x^6}{3\cdot4\cdot5\cdot6\, f^6} + \frac{x^{10}}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\, f^{10}} + \text{etc.}\right) \\ + \delta\left(\frac{x^3}{f^3} + \frac{x^7}{4\cdot5\cdot6\cdot7\, f^7} + \frac{x^{11}}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\, f^{11}} + \text{etc.}\right) \end{array}$$

intelligo per α, β et δ quatuor arbitrarias conſtantes quarum ope aequatio generaliſſima cuiuis oſcillationum generi adaequari poteſt, aequatio abſolute integrata vi §. X. praecedentis diſſertationis ita ſe habet

$$y = a\, e^{\frac{x}{f}} + b\, e^{\frac{-x}{f}} + h \,\text{Sin. Arc.}\left(\frac{x}{f} + n\right)$$

in qua e denotat numerum, qui pro logarithmo hyperbolico dat vnitatem, dum rurſus a, b, h et n quatuor ſunt arbitrariae conſtantes. Signum autem Sin. Arc. denotat ſinum arcus in circulo, cuius radius ponitur aequalis vnitati, in quo adeoque circulo ſumendus eſt arcus $\frac{x}{f} + n$; poſteaque ſinus huic arcui reſpondens multiplicandus eſt per h.

Veras eſſe haſce aequationes integratas patebit ex differentiatione earundem, vbi quidem ratione poſterioris aequationis obſeruandum erit, quod ſit $d.$ Sin. Arc.

 $\left(\frac{x}{f}\right.$

$(\frac{x}{f} + n) = \pm \frac{dx}{f} \times$ Coſ. Arc. $(\frac{x}{f} + n)$;
dd Sin. Arc. $(\frac{x}{f} + n) = \frac{-dx^2}{ff} \times$ Sin. Arc- $(\frac{x}{f} + n)$, deinde
d^3 Sin. Arc. $(\frac{x}{f} + n) = \frac{\mp dx^3}{f^3} \times$ Coſ. Arc. $(\frac{x}{f} + n)$ ac denique
d^4 Sin. Arc. $(\frac{x}{f} + n) = \frac{dx^4}{f^4} \times$ Sin. Arc. $(\frac{x}{f} + n)$.
Tum etiam patet, easdem aequationes omnem, quam poſſunt, habere extenſionem ex eo quod vtraque quatuor gaudeat quantitatibus conſtantibus arbitrariis quarum nulla ſit ſuperflua.

§. VII. His peractis id nunc requiritur vt pro quovis oſcillationum exemplo litterae arbitrariae debito modo deſignentur atque tandem aequatio finalis exhibeatur inter *f* et *l*; Iſta vero omnia perficientur ad modum §. VII. primae diſſertationis pro aequatione ad curuam per ſeries et §. X. pro aequatione altera, ita vt nihil ſuperſit quam vt mente recte aſſequamur modum, quo oſcillationes perficiuntur, vt hinc examinetur, quaenam puncta, quaenam tangentes, quinam radii oſculi etc. ex ipſa oſcillationum natura ſine calculo cognita ſint, hisque deinde cognitis quantitates arbitrariae accommodentur; Poſtquam haec omnia ita peracta fuerint, vltima quae prodibit aequatio inter *f* et *l* ſemper infinitas radices continebit reales; inde colligere eſt, laminam eandem ſimili plane modo adhibitam, infinitas et diuerſiformes curuaturas inter oſcillandum induere poſſe, ita vt vel nullus, vel vnus, vel duo etc. formentur nodi; cum nullus formatur nodus, formabitur ſonus obtuſiſſimus; acutior fit ſonus, cum nodus vnus eſt, deinde cum duo ſunt nodi et ſic porro: Hanc rem illuſtrant figura I. II. III. diſſertationis primae, pro quibus ſimul determinaui longitudines

nes pendulorum iſochronorum ſonorumque proportionem: Monſtraui ſcilicet §. XVII. valores rationis l ad f eſſe proxime vt quadrans vel tres quadrantes vel quinque quadrantes circuli etc. ad radium, vbi tamen ſola ratio prima quadrantis ſimplicis ad radium paullo nimis a vera aberret, quippe quae accuratius multo ſe habet vt $\sqrt{7}$ ad $\sqrt{2}$; praefatarum autem rationum quadrata dant rationem ſonorum, ſunt igitur v. gr. in lamina elaſtica altera ſui extremitate muro infixa duo ſoni infimi proxime vt $\frac{7}{2}$ ad $9qq$, ſi ſit q quadrans circuli, cuius radius eſt vnitas, ſiue fere vt 1 ad $6\frac{1}{3}$; ergo ſonus ſecundus erit primi proxime decima nona ſeu duplicis octauae quinta aut potius duplicis octauae ſexta minor, ex qua magna ſonorum differentia facile colligitur, reliquos ſonos omnes fore imperceptibiles; Duo autem ſoni infimi cum diſtincte percipi poſſint, volui huius corollarii veritatem experimento cognoſcere, quod ſic inſtitui:

Experimentum. Acum chalybeam vnam fere lineam craſſam et 5 pollices longam parieti firmiter infixi, tum obſeruaui, ſi acus tota a ſitu naturali deturbetur, ſonum valde obtuſum oriri, ſi vero extremitas libera eius leuiter perſtringatur, ſonum generari acutum, qui prioris eſt duplicis octauae circiter quinta, vt habet theoria: plerumque autem ambo ſoni ſimul exiſtunt atque diſtinctiſſime percipiuntur.

§. VIII. In hoc experimento dixi, ambos ſaepe ſonos ſimul coexiſtere et percipi, nec id mirum eſt, cum neutra oſcillatio neutram officiat vel impedimento ſit; vtcunque enim lamina ratione vnius oſcillationis incuruetur, poterit tamen ſemper vt recta conſiderari, ratione al-

alterius oſcillationis, quia oſcillationes ſunt veluti infinite paruae. Ergo oſcillationes cuiusuis ſpeciei perinde fient, ſiue lamina omni alia oſcillatione deſtituta ſit, ſiue alias ſimul oſcillationes perficiat. In laminis liberis, quarum oſcillationes iamiam examinabimus, ſaepe tres quatuorue ſonos ſimul percepi.

§. IX. Haec ſunt, quae argumento noſtro praemittenda eſſe putaui; iam igitur progrediemur ad ſecundum oſcillationum et ſonorum inde formatorum genus, cuius mentionem feci in §. II. quaeritur nempe, qui oſcillationes fiant et quis ſonus generetur, ſi lamina chalybea paulo craſſior e filo ſuſpenſa percutiatur; huic examini anſam mihi dederunt experimenta, quae cum priſmatibus chalybeis, cuiusmodi in horologiis pro variis cantilenis ab automato formandis adhibent (Gallis vocantur Carillons) inſtitueram. Haec priſmata craſſitie tres circiter lineas, latitudine 6 lin. aequabant et longitudine a quatuor vsque ad 8 vel 9 pollices exurgebant. Haec dum e filo ſuſpenſa percuterem, in longioribus ſonos ſimul plures, in breuioribus vnicum admodum acutum percepi. Hic vero non ſtatim apparet modus quo laminae oſcillationes perficiant, cum nullum adſit punctum fixum, cuius ſitus per ſe pateat nec in lamina inflexa tangens alibi innoteſcat. Prima igitur mihi cura fuit modum inquirere, quo ſingulae laminae percuſſae partes vibrentur, moxque rem totam detexi; tum vero animum ſubiit in laminis longioribus ſonos a ſe inuicem ſeparare, ita vt ſonus nec aliis mixtus oriretur, ſonis ſingulis veras ſuas menſuras aſſignare, caeteraque omnia phaenomena rite explicare.

§. X. Statim atque de hiſce noſtris oſcillationibus cogitare coepi, mente concepi eas hunc in modum fieri:

Sit

Sit nempe (Fig. 1) BD lamina elaſtica recta per totam ſuam longitudinem vniformis, quam vt lineam mathematicam conſiderabimus: putetur lamina percuti; e loco ſuo a percuſſione turbabitur quidem lamina, a quo autem motu locali, qui nihil ad inſtitutum noſtrum facit, mentem abſtrahemus; Effectus percuſſionis vnice hic conſiderandus conſiſtit in motu tremulo inteſtino ad ſonum formandum apto: Iſte motus tremulus ita fit, vt lamina recta BCD aſſumat figuram *bcd*, idque alternis vicibus ad vnam alteramque partem; Hanc vero oſcillationum tremularum ideam cum ipſa rei natura plane conuenire luculenter ex infra dicendis eluceſcet. Hac itaque admiſſa, licebit *a priori* curuaturae *bcd* multas proprietates aſſignare, quarum praecipuas hic enumerabimus.

1°. Si recta BD bifariam ſecetur in C ducaturque ad BD minima perpendicularis C*c*, erit ramus *ceb* ſimilis et aequalis ramo *cfd* et vterque ad eandem partem poſitus ratione lineae BD.

2°. Tangens in C erit lineae BD perfecte parallela

3°. Radii oſculi in extremitatibus *b* et *d* ſunt infiniti, quia ibi vis inflectens nulla eſt: ſequitur hinc, cum applicatae y ceu infinite paruae conſiderentur, eſſe in punctis *b* et *d*, $ddy = 0$.

4°. In iisdem punctis *b* et *d* etiam fit $d^3y = 0$: Hae duae vltimae proprietates ceu corollaria ſequuntur ex methodo quam §. IV. primae diſſertationis adhibuimus pro inuenienda aequatione ad curuam, ad quam laminae in omni oſcillationum genere incuruantur.

5°. Notari etiam poteſt (quamuis iſta notatione non vtemur in ſequentibus) centrum grauitatis totius laminae

minae in quemcunque ſitum inflexae durante tota vibratione conſtanter permanere in eodem puncto C.

6°. Summas omnium virium accelerantium ad oppoſitas partes lineae BD eſſe aequales et contrarias

7°. Spatia comprehenſa inter rectas B*e*, *f*D et arcus *be*, *fd* ſimul ſumta eſſe aequalia ſpatio *ecfe* ad contrariam partem poſito.

Hae ſunt proprietates curuae, ad quam lamina elaſtica vniformis naturaliter recta et percuſſa, dum oſcillationes minimas perficit, incuruatur; harum proprietatum ope poterimus deinceps arbitrarias conſtantes ad propoſitum noſtrum vtiles definire; aequatio autem curuae *becfd* eadem ſemper eſt nempe $f^4 d^4 y = y dx^4$ pariterque eadem expreſſio pro longitudine L penduli ſimplicis iſochroni cum vibrationibus laminae, nempe $L = \frac{3p}{P} \times \frac{f^4}{l^4} \times C$.

§. XI. Omnes vero praedictae proprietates etiam ſubſiſtere poſſunt, ſi lamina vibrari ponatur ad modum figurae ſecundae vel figurae tertiae et ſic porro, ita vt curuatura laminae lineam BD vel in duobus vel in quatuor vel in ſex punctis et ſic in infinitum interſecet; quo maior autem eſt numerus interſectionum eo acutior fit ſonus: has vero curuaturas ſonosque reſpondentes dicam pertinere ad primam claſſem. Iam enim monſtrabo ſecundam ſupereſſe claſſem, in qua numerus praefatarum interſectionum ſimiliter in infinitum progredi poteſt, ſed impariter. Seorſim hanc claſſem indicandam putaui, quia nouo calculo opus habet quamuis parum diuerſo.

§. XII. Secundam claſſem conſtituunt oſcillationes quae fiunt ad normam figurae 4^tae^ et 5^tae^ quarum numerus in infinitum progreditur; differunt curuaturae primae claſſis a curuaturis ſecundae, quod numerus interſectio-

ctionum in prima ſit par in ſecunda impar, et in hac poſteriore claſſe interſectio media C eſt in ipſa medietate laminae: Vtrique claſſi ſingulae proprietates §. X. expoſitae ſunt communes excepta prima et ſecunda proprietate; iſta ſecunda proprietas nihil ad ſcopum noſtrum facit; diuerſitatem autem pro vtraque claſſe vel ipſae figurae indicant, quod vero ad primam proprietatem attinet, haec nunc ita immutanda eſt, vt dicamus *ramum* C eb *in figura* 4. *equidem ſimilem et aequalem eſſe ramo* C fd *ſed ad partem contrariam poſitum ratione lineae* BD: Ita quoque res ſe habet in figura 5. et in omnibus reliquis, quae mente concipiende ſunt. Caeterum interſectines curuaturae cum linea BD deinceps nodos vocabimus, qui plane ſunt immobiles, quandoquidem diſtantiae cuiusuis curuae puncti ab axe BD eandem ſemper et vbique inter ſe rationem ſeruent, ita vt ſi haec diſtantia ſemel nulla fuerit, durante tota oſcillatione ſemper nulla maneat.

§. XIII. His omnibus probe perpenſis iam calculos noſtros ponemus. Vidimus in prima diſſertatione, quod ſi abſciſſae x ſumantur in axe BD et applicatae minimae y ad BD ſint perpendiculares fore $f^4 d^4 y = y dx^4$ et ſaepe monuimus hanc aequationem pro omni oſcillationum genere valere; quia vero quantitas x aequationem non ingreditur et dimenſio ipſius dx eſt par, ideo licet initium abſciſſarum vbiuis ponere; aptiſſime autem in praeſenti negotio ponitur in puncto C pro vtraque oſcillationem claſſe. Quia vero in claſſe prima pro figuris I. II. III. etc. valor ipſius y idem eſt mutata x in $-x$ ob proprietatem 1. §. X. ideo in aequatione

§. VI. faciemus $\beta = 0$ et $\delta = 0$, vt ſic ſolae dimenſiones pares litterae x remaneant: tuncque habebimus *pro claſſe prima*

$$y = \begin{array}{l} \alpha\left(1 + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 f^4} + \frac{x^8}{1 \cdot 2 \cdot \ldots 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 f^8} + \text{etc}\right) \\ + \gamma\left(\frac{xx}{ff} + \frac{x^6}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 f^6} + \frac{x^{10}}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 f^{10}} + \text{etc.}\right) \end{array}$$

Similiter in claſſe ſecunda pro figuris IV. V. etc. mutata x in $-x$, mutatur y in $-y$ (per §. XII.), atque adeo faciemus $\alpha = 0$ et $\gamma = 0$, vt ſolae dimenſiones impares litterae x remaneant: habebimns igitur *pro claſſe ſecunda*

$$y = \begin{array}{l} \beta\left(\frac{x}{f} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 f^5} + \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots 8 \cdot 9 f^9} + \text{etc.}\right) \\ + \delta\left(\frac{x^3}{f^3} + \frac{x^7}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 f^7} + \frac{x^{11}}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 f^{11}} + \text{etc.}\right) \end{array}$$

Deinde in vtraque claſſe (per annotation: 3 et 4. §. X.) poſita $x = CD = \frac{1}{2} l$ fit $ddy = 0$ et $d^3y = 0$; Eſtque autem ob dx conſtans *in claſſe prima*

$$ddy = \begin{cases} \alpha dx^2\left(\frac{xx}{1 \cdot 2 \cdot f^4} + \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot \ldots 4 \cdot 5 \cdot 6 f^8} + \text{etc.}\right) \\ + \gamma dx^2\left(\frac{2}{ff} + \frac{x^4}{3 \cdot 4 \cdot f^6} + \frac{x^8}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 f^{10}} + \text{etc.}\right) \end{cases}$$

atque $$d^3y = \begin{cases} \alpha dx^3\left(\frac{x}{f^4} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 f^8} + \text{etc.}\right) \\ + \gamma dx^3\left(\frac{x^3}{3 f^6} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 f^{10}} + \text{etc.}\right) \end{cases}$$

Pariter *in claſſe ſecunda* fit

$$ddy = \begin{cases} \beta dx^2\left(\frac{x^3}{2 \cdot 3 f^5} + \frac{x^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 f^9} + \text{etc.}\right) \\ + \delta dx^2\left(\frac{2 \cdot 3 x}{f^3} + \frac{x^4}{4 \cdot 5 f^7} + \frac{x^9}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 f^{11}} + \text{etc.}\right) \end{cases}$$

atque $$d^3y = \begin{cases} \beta dx^3\left(\frac{xx}{2 f^5} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot \ldots 6 f^9} + \text{etc.}\right) \\ + \delta dx^3\left(\frac{2 \cdot 3}{f^3} + \frac{x^4}{4 f^7} + \frac{x^8}{4 \cdot \ldots 8 f^{11}} + \text{etc.}\right) \end{cases}$$

Iam vero in vtraque claſſe facta $x = \frac{1}{2} l$ debent elementa ddy et d^3y euaneſcere; hinc duplici modo tam $\frac{\alpha}{\gamma}$ quam $\frac{\beta}{\delta}$ per aequationem habetur et ſic vtrobique aequatio

quatio finalis inuenitur inter *l* et *f*. Hiſce veſtigiis inſiſtendo reperietur recte ordinatis terminis *pro claſſe prima*.

$$\left(2+\frac{l^4}{3\cdot4\cdot2^4 f^4}+\frac{l^8}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot2^8 f^8}+\text{etc.}\right):\left(\frac{ll}{1\cdot2\cdot2^2 ff}+\frac{l^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot2^6 f^6}+\text{etc.}\right)$$
$$=\left(\frac{ll}{\cdot2^2 ff}+\frac{l^6}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot2^6 f^6}+\text{etc.}\right)\left(1+\frac{l^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot2^4 f^4}+\text{etc.}\right)$$

pariterque habebitur *pro claſſe ſecunda*.

$$\left(2\cdot3+\frac{l^4}{4\cdot5\cdot2^4 f^4}+\frac{l^8}{4\cdot5\cdots9\cdot2^8 f^8}+\text{etc.}\right):\left(\frac{ll}{2\cdot3\cdot2^2 ff}+\frac{l^6}{2\cdots7\cdot2^6 f^6}+\text{etc.}\right)$$
$$=\left(2\cdot3+\frac{l^4}{4\cdot5\cdot2^4 f^4}+\frac{l^8}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdots2^8 f^8}+\text{etc.}\right)\cdot\left(\frac{ll}{2\cdot2^2 ff}+\frac{l^6}{2\cdots2^6 f^6}+\text{etc.}\right)$$

Ex iſtis duabus aequationibus inueniuntur pro quauis oſcillationum claſſe omnes valores rationis $\frac{l}{f}$, vtraque enim aequatio infinitas dat radices reales. In prima claſſe valor minimus rationis $\frac{l}{f}$ inſeruit pro figura prima; radix ſequens pro figura ſecunda et ſic porro: In ſecunda claſſe radix minima rationis $\frac{l}{f}$ reſpondet figurae quartae, radix ſequens figurae quintae ſicque deinceps Non licet autem niſi oporoſo calculo ad radices appropinquare. iſteque calculus fit fere inſuperabilis, cum figuram tertiam vel quintam transgredimur. At ſi methodo altera, quae aequatione abſolute integrata §. VI. innititur, vtamur, iſtud negotium expedite abſoluitur eoque accuratius, quo plures nodos lamina vibrata formet. Volui tamen hac priori etiam methodo calculum inire, vt viderem vtriusque methodi conformitatem ſicque altera methodus altera confirmaretur. Inueni itaque

pro figura prima pro x. $\frac{l^4}{f^4} = 496$

pro figura ſecunda pro x. $\frac{l^4}{f^4} = 14608$

pro figura quarta pro x. $\frac{l^4}{f^4} = 3824$

His addo ex priori diſſertatione caſum ſimpliciſſimum, quo

 lamina

lamina eiusdem longitudinis l ſeu BD muro infixa vibratur (vid. §. VII. ſuperioris diſſertationis) atque ſic habebimus

pro figura ſexta pro x. $\frac{l^4}{f^4} = 12, 25$.

Iſta vero quia nunc breuius et acuratius beneficio alterius aequationis abſolute integratae abſoluam, eorum applicationem deinceps dabo.

§. XIV. Iam itaque conſiderabimus aequationem generaliſſimam integratam §. VI. expoſitam et explicatam, nempe

$$y = a e^{\frac{x}{f}} + b e^{\frac{-x}{f}} + b \text{ Sin. Arc } \left(\frac{x}{f} + n \right)$$

quae rurſus omnes omnino oſcillationes continet nunque ad praeſentes oſcillationum ſpecies ope proprietatum §. X. indicatarum applicanda eſt. Obſeruabimus autem proprietati primae §. X. ſatisfieri, ſi fiat $b = a$ et $n =$ quadranti circuli cuius radius eſt vnitas, quem quadrantem indicabimus littera q: proprietati autem §. XII. expoſitae ſatis fit ponendo $b = -a$ et $n = 0$, ergo habebimus *pro claſſe prima*

$$y = a e^{\frac{x}{f}} + a e^{\frac{-x}{f}} + b \text{ Sin. Arc. } \left(\frac{x}{f} + q \right)$$

et *pro claſſe ſecunda*

$$y = a e^{\frac{x}{f}} - a e^{\frac{-x}{f}} + b \text{ Sin. Arc. } \frac{x}{f}$$

In hiſce ambabus aequationibus ſuperſunt determinandae litterae a et b, quod rurſus fiet ope 3. et 4. annotationis §. X. quae iubent, vt fiat $ddy = 0$ et $d^3y = 0$, cum ponitur $x = \pm \frac{1}{2} l$. Habebitur itaque *pro claſſe prima*

$$a e^{\frac{l}{2f}} + a e^{\frac{-l}{2f}} - b \text{ Sin. Arc. } \left(\frac{l}{2f} + q \right) = 0$$

atque $$a e^{\frac{l}{2f}} - a e^{\frac{-l}{2f}} + b \text{ Coſin. Arc } \left(\frac{l}{2f} + q \right) = 0$$

harum-

harumque duarum aequationum beneficio tandem aequatio pura habetur inter l et $ſ$, exprimendo duplici modo valorem $\frac{a}{b}$, erit nempe

$$\frac{\text{Sin. Arc. }\left(\frac{l}{2ſ}+q\right)}{e^{\frac{l}{2ſ}}+e^{\frac{-l}{2ſ}}}=\frac{-\text{Coſin. Arc. }\left(\frac{l}{2ſ}+q\right)}{e^{\frac{l}{2ſ}}-e^{\frac{-l}{2ſ}}}$$

Pariterque fiet *pro ſecunda claſſe*

$$a\,e^{\frac{l}{2ſ}}-a\,e^{\frac{-l}{2ſ}}-b\text{ Sin. Arc. }\frac{l}{2ſ}=0$$

atque $$a\,e^{\frac{l}{2ſ}}+a\,e^{\frac{-l}{2ſ}}-b\text{ Coſin. Arc. }\frac{l}{2ſ}=0$$

quae ambae aequationes inter ſe combinatae dant

$$\frac{\text{Sin. Arc }\frac{l}{ſ}}{e^{\frac{l}{2ſ}}-e^{\frac{-l}{2ſ}}}=\frac{\text{Coſin. Arc. }\frac{l}{2ſ}}{e^{\frac{l}{2ſ}}+e^{\frac{-l}{2ſ}}}$$

In hisce vero ambabus aequationibus, quas pro ratione $\frac{l}{ſ}$ pure determinanda dedimus, reiiciamus ſtatim terminum $e^{\frac{-l}{2ſ}}$, qui prae termino ſocio $e^{\frac{l}{2ſ}}$ valde paruus eſt ſtatim atque $\frac{l}{2ſ}$ vix binarium excedit: In hac hypotheſi habebimus ſimpliciter *pro prima claſſe*

$$\text{Sin Arc. }\left(\frac{l}{2ſ}+q\right)=-\text{Coſin. Arc. }\left(\frac{l}{2ſ}+q\right)$$

et *pro ſecunda claſſe*

$$\text{Sin. Arc. }\frac{l}{2ſ}=\text{Coſin. Arc. }\frac{l}{2ſ}$$

aequatio prior dat, ſi per n intelligatur qualiscunque numerus integer affirmatiuus,

$$\frac{l}{2ſ}=\frac{4n-1}{2}q \text{ ſiue } \frac{l}{ſ}=(4n-1)q$$

ſecunda autem aequatio facit

$$\frac{l}{2ſ}=\frac{4n-3}{2}q \text{ ſiue } \frac{l}{ſ}=(4n-3)q$$

vtraque aequatio continetur in hac generaliori

$$\frac{l}{ſ}=mq$$

 ſi

ſi per m intelligatur qualiscunque numerus impar affirmatiuus. Vt vero iam intelligamus, quisnam numerus m in quouis caſu ſit accipiendus, notabimus quod creſcente numero nodorum, oſcillationes fiant citiores, ſimulque adeo pendulum iſochronum §. V. determinatum fiat breuius, ſicque quantitas $\frac{f}{l}$ decreſcat, id eſt, quantitas $\frac{f}{l}$ creſcat: ergo quo maior eſt numerus nodorum eo maior continue numerus m accipiendus erit; vnde ſequitur ſi vel in vnico caſu appareat, quisnam numerus m reſpondeat numero cuicunque nodorum, idem de omnibus reliquis pateſcere: perſpicuum autem eſt, minimo nodorum numero reſpondere valorem minimum quantitatis $\frac{l}{f}$; iam vero in claſſe prima oſcillationum nodi ad minimum duo ſunt, tumque fit $4n-1$ ſeu $m=3$; ſi itaque generaliter numerus nodorum dicatur N, erit reſpondens valor $\frac{l}{f} = (2N-1)q$.

Notetur autem hoſce praefatos valores rationis l ad f non omnino exactos eſſe quidem, ſed tamen vero proximos imo inſenſibiliter a veris aberrare, modo tres ſint nodi, et cum nunquam pauciores duobus ſint nodi, ideo nunc examinabimus correctionem adhibendam pro duobus nodis.

Cum itaque duo ſunt nodi, diximus eſſe proxime $\frac{l}{f} = 3q$; verum autem valorem exprimi aequatione

$$\frac{\text{Sin. Arc.}\left(\frac{l}{2f}+q\right)}{e^{\frac{l}{2f}}+e^{\frac{-l}{2f}}} = \frac{-\text{Coſin. Arc.}\left(\frac{l}{2f}+q\right)}{e^{\frac{l}{2f}}-e^{\frac{-l}{2f}}}$$

: ponamus iam $\frac{l}{f} = 3q + 2\alpha$ et conſideremus quantitatem α vt valde paruam; Sic erit

Sin.

$$\text{Sin. Arc.}\left(\frac{l}{2f}+q\right)=\text{Sin. Arc.}\left(\tfrac{3}{2}q+\alpha\right)=-\sqrt{\tfrac{1}{2}}-\alpha\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\text{Coſin.Arc.}\left(\frac{l}{2f}+q\right)=\text{Coſin.Arc.}\left(\tfrac{3}{2}q+\alpha\right)=\sqrt{\tfrac{1}{2}}-\alpha\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$e^{\frac{l}{2f}}=e^{\frac{3}{2}q+\alpha}=e^{\frac{3}{2}q}+\alpha e^{\frac{3}{2}q}$$

$$e^{\frac{-l}{2f}}=e^{-\frac{3}{2}q-\alpha}=e^{-\frac{3}{2}q}-\alpha e^{-\frac{3}{2}q}$$

His ſubſtitutis valoribus in noſtra aequatione prodit

$$\frac{-\sqrt{\tfrac{1}{2}}-\alpha\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{e^{\frac{3}{2}q}+\alpha e^{\frac{3}{2}q}+e^{-\frac{3}{2}q}-\alpha e^{-\frac{3}{2}q}}=\frac{-\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\alpha\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{e^{\frac{3}{2}q}+\alpha e^{\frac{3}{2}q}-e^{-\frac{3}{2}q}+\alpha e^{-\frac{3}{2}q}}$$

quae recte reducta dat tandem $\alpha=e^{\frac{l}{3q}}+1=$ proxime o' 0089 et conſequenter $\frac{l}{f}=4,\ 7213$ atque $\frac{l^4}{f^4}=497$' qui numerus fere non differt ab altero quem §. XIII. circa finem methodo plane diuerſa eruimus. Simul autem liquet, ex allato exemplo, quam parum aequatio $\frac{l}{f}=(2N-1)q$ a vera abludat; poterit igitur iſta correctio in reliquis caſibus omnibus, vbi multo minoris momenti ſit, tuto negligi. Hinc vero nunc talia deduco corollaria.

1°. Sit numerus nodorum N, erit vt iam dictum eſt proxime

$$\frac{l}{f}=(2N-1)q.$$

2°. Pendulum iſochronum $L=\frac{3p}{P}\times\frac{f^4}{l^4}\times C$ (per §. V.) $=\frac{3p}{P}\times\frac{1}{(2N-1)^4 q^4}C$ et quia quantitates p, P, C eadem ſunt pro vna eademque lamina, erunt pendula iſochrona in ratione reciproca biquadrata dupli nodorum numeri vnitate diminuti.

3°. Cum ex data penduli ſimplicis longitudine innoteſcat numerus oſcillationum intra minutum ſecundum et cum etiam experimentis conſtet in inſtrumento muſico ad tonum choralem compoſito ſono infimo C reſpondere 116 vibrationes intra minutum ſecundum, apparet in ſingulis caſi-

caſibus ſonum laminae definiri poſſe numeris abſolutis. Erunt autem ſoni proxime in ratione quadrata nodorum numeri dupli vnitate diminuti, id eſt, vt $(2N-1)^2$

4°. Cum vi §. XV. ſuperioris diſſertationis ſit pro figura ſexta longitudo penduli iſochroni $= \frac{12}{49} \times \frac{p}{P} \times C$, licebit ſonos praefatos ad hunc tanquam fundamentalem referre, quem deſignabimus per vnitatem tuncque erit quam proxime

I.	Sonus pro figura ſexta	1, 000
II.	Sonus pro figura prima	6, 345
III.	Sonus pro figura quarta	17, 627
IV.	Sonus pro figura ſecunda	34, 545
V.	Sonus pro figura quinta	57, 105
VI.	Sonus pro figura tertia	86, 308

Numerus ſecundo loco poſitus iuſto paullo maior eſt, correctionem eius ſupra dedimus eaque adhibita prodit 6, 317, tantilla autem ſonorum differentia, cum multum abſit vt auribus percipi poſſit, legem generalem infringere nolui. Sonus ſecundus eſt primi circiter octauae duplicis ſexta minor: tertius ſecundi eſt octauae quarta maior quartus tertii fere eſt octaua: tum ſequitur ſexta maior et tandem vltimus penultimi efficit propemodum quintam.

§. XV. Atque ſic tandem determinauimus omnia et ſingula, quae ſonos eorumque diuerſitates ſpectant: Supereſt, vt dicamus de locis nodorum, ſiue vt determinemus loca, in quibus applicata y euaneſcat. Id vero non niſi taedioſo ſatis calculo perficitur attamen cum iſtud argumentum neceſſario ad inſtitutum noſtrum pertineat, iniquum foret iſtud, quicquid ſit laboris, plane recuſare. Poteſt res iſta perfici rurſus tum ope aequationum §. XIII.

tum

tum etiam ope aequationum abſolute integratarum §. XIV. vtraque methodo pro exemplis aliquibus vſus ſui et eadem proxime nodorum loca vtraque inueni : Hic vero relicta methodo priori ad alteram refugiemus et conueniet rurſus ambas oſcillationum claſſes ſeorſim conſiderare.

§. XVI. Inuenimus §. XIV *pro claſſe prima* hanc aequationem

$$y = ae^{\frac{x}{f}} + ae^{\frac{-x}{f}} + b\,\text{Sin. Arc.}\left(\frac{x}{f} + q\right)$$

tum etiam oſtendimus in eodem paragrapho verſus finem eſſe proximo $\frac{l}{f} = (2N-1)q$ ſiue $f = \frac{l}{(2N-1)q}$: Subſtituatur iam iſte valor quantitatis f et habebitur talis aequatio

$$y = ae^{\frac{(2N-1)qx}{l}} + ae^{\frac{-(2N-1)qx}{l}} + b\,\text{Sin. Arc.}\left(\frac{(2N-1)qx}{l} + q\right)$$

et quia in nodis fit $y = 0$, habebitur

$$(A)\; ae^{\frac{(2N-1)qx}{l}} + ae^{\frac{-(2N-1)qx}{l}} + b\,\text{Sin. Arc.}\frac{(2N-1)qx + ql}{l} = 0$$

vbi $b = \left(ae^{\frac{(2N-1)q}{2}} + ae^{\frac{-(2N-1)q}{2}}\right)$; Sin. Arc. $\left(\frac{(2N+1)q}{2}\right.$ et N eſt numerus quicunque par : At vero ſimul eſt Sin.Arc. $\left(\frac{2N-1}{2}\right) q = \mp \sqrt{\tfrac{1}{2}}$; eſt igitur $b = \mp \left(e^{\frac{(2N-1)q}{2}} + e^{\frac{-2(N-1)}{2}q}\right) a\sqrt{2}$; ſubſtituto iſto valore in aequatione (A) factaque diuiſione terminorum per a, habebitur

$$(B)\; e^{\frac{(2N-1)qx}{l}} + e^{\frac{-(2N-1)qx}{l}} = \mp\left(e^{\frac{(2N-1)q}{2}} + e^{\frac{-(2N-1)q}{2}}\right)\sqrt{2} \times \text{Sin.Ar}$$

$\frac{(2N-1)qx + ql}{l}$. In hac vltima aequatione poteſt terminus $e^{\frac{-(2N-1)q}{2}}$ tuto negligi prae termino ſocio $e^{\frac{(2N-1)q}{2}}$ praeſertim ſi numerus N, qui quidem par eſt, binarium excedat et caſus

ſus, in quo N $=2$, ſeorſim ſupputetur; admiſſa iſta reiectione tanquam nullius momenti, mutatur aequatio (B) in hanc

$$(C)\ e^{\frac{(2N-1)qx}{l}} + e^{\frac{-(2N-1)qx}{l}} = \pm\, e^{\frac{(2N-1)q}{2}}$$

$\sqrt{2} \times$ ſin. Arc. $\frac{(2N-1)qx+ql}{l}$. Antequam in reductione huius aequationis vlterius progrediamur, e re erit, quaedam monere de ambiguitate ſigni $\pm$ membri ad dextram poſiti; orta iſta ambiguitas fuit ex aequatione ſupra adhibita, vbi poſuimus Sin. Arc. $\frac{2N+1}{2}q = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, ex quo patet ſigna ſuperiora valere ſi ſit N numerus impariter par, et ſigna inferiora, cum N eſt numerus pariter par, vel etiam notari poterit, quantitatem $\pm\, e^{(\frac{2N-1}{2})q}\sqrt{2} \times$ Sin. Arc. $\frac{(2N-1)qx+ql}{l}$ in omni caſu eſſe affirmatiuam, ita vt ſignum ſuperius ſeligendum, cum quantitas Sin. Arc. $\frac{(2N-1)qx+ql}{l}$ eſt affirmatiua, inferius ſi ſit negatiua.

Nunc vero aequationi (C) talis concilietur forma

$$(D)\ \pm\ \text{Sin. Arc. } \frac{(2N-1)qx+ql}{l} = e^{\frac{(2N-1)\times(2qx+ql)}{2l}}$$

$\sqrt{\tfrac{1}{2}} + e^{\frac{(2N-1)\times(-2qx-ql)}{2l}}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, deinde ponatur $\frac{(2N-1)qx+ql}{l} = 2mq + \alpha$, intelligendo per m numerum quemcumque integrum; ita vt $2mq$ exprimat vel ſemicirculum vel circulum integrum vel ſesquicirculum et ſic porro; quoties autem α arcum exprimet non admodum magnum, erit proxime Sin. Arc. $(2mq+\alpha)$ $= \mp\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6}\right)$, vbi ſignum ſuperius valet vel inferius, prouti m fuerit numerus impar vel par. Hiſce factis ſubſtitutionibus mutabitur aequatio (D) in hanc

(E)

$$(E) \pm (\mp) \left(\alpha - \tfrac{\alpha^3}{6}\right) = e^{(2m-1)q+\alpha-\left(\frac{2N-1}{2}\right)q}$$

$\sqrt{\tfrac{1}{2}} + e^{-(2m-1)q-\alpha-\left(\frac{2N-1}{2}\right)q}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ quia vero in hypotheſi verſamur eſſe α arcum paruulum, licebit ponere $e^{\alpha} = 1 + \alpha$ et $e^{-\alpha} = 1 - \alpha$, ſimulque licebit ſimpliciter ponere α loco $\alpha - \frac{\alpha^3}{6}$: Sub hiſce hypotheſibus mutabitur aequatio (E) in hanc

$$(F) \pm (\mp)\, \alpha = e^{(2m-1)q-\left(\frac{2N-1}{2}\right)q} \times (1+\alpha)\sqrt{\tfrac{1}{2}} + e^{-(2m-1)q-\left(\frac{2N-1}{2}\right)q}$$

$\times (1 - \alpha)\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, haecque vltima aequatio dat

$$(G)\, \alpha = \frac{e^{(2m-1)q-\left(\frac{2N-1}{2}\right)q}\sqrt{\tfrac{1}{2}} + e^{-(2m-1)q-\left(\frac{2N-1}{2}\right)q}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{\pm(\mp)1 - e^{(2m-1)q-\left(\frac{2N-1}{2}\right)q}\sqrt{\tfrac{1}{2}} + e^{-(2m-1)q-\left(\frac{2N-1}{2}\right)q}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}$$

atque haec tandem proxime erit vera, eoque propius, quo numerus nodorum N maior eſt, numerusque m e contrario minor: notandum autem eſt, ſi ſumatur $m = 1$, determinari nodum puncto medio C proximum, ſi $m = 2$ oriri nodum ſequentem et ſic porro, vnde liquet maximum numerum m eſſe dimidium numerum nodorum, tum etiam attendenti facile patebit in numeratore et denominatore terminum vltimum non mereri vt eius ratio habeatur, hoc igitur reiecto vtrobique, multiplicatoque tam numeratore quam denominatore per $e^{-(2m-1)q}$ $+ \left(\frac{2N-1}{2}\right)q \sqrt{2}$, fiet tandem

$$(H)\ \alpha = \frac{1}{\pm(\mp)\, e^{\left(\frac{2N-4m+1}{2}\right)q}\sqrt{2} - 1}$$

vnde iam videmus recte a nobis tractatam fuiſſe α tan-

 quam

quam admodum exiguam, quippe nunquam ad $\frac{1}{4}$ aſſurgentem. Inde vero ſtatim eruitur valor quaeſitus ipſius x, cum enim poſſuimus ſupra $\frac{(2N-1)qx+ql}{l} = 2mq + \alpha$, erit $x = \frac{2m-1}{2N-1}l + \frac{\alpha l}{2Nq-q}$, ſiue

$$x = \frac{2m-1}{2N-1}l + \frac{l}{(2Nq-q)\times\left(\pm(\mp)e^{\frac{2N-4m+1}{2}q}\sqrt{2-1}\right)}$$

videbitur fortaſſe iſta methodus nodorum poſitiones determinandi et nimis operoſa et minus accurata. Ego vero, concinniorem methodum nec video nec expecto velim que adeo vt hic perpendatur ad naturam huius problematis quo requiritur formula generalis, quae nunc vnam, nunc duas, nunc tres radices et ſic porro quousque libuerit exhibeat, quod concinniori formula praeſtari poſſe non crediderim: Docuit me quoque et experientia et calculus ſpecialis exemplorum, in quibus formulae noſtrae vel maxime aberrare deberent, eas eſſe plusquam credi poſſet, accuratas, nec profecto vllos ſine praeuio examine rigoroſo reieci terminos. Sic itaque tuto formulis noſtris vtemur in examine experimentorum quae hac de re inſtitui poſſe deinceps docebimur; Nunc vero aliquas notas hic adiiciam.

I. In formulis noſtris ſigna adſunt dupliciter ambigua; notabitur igitur, quod iam monui, attendendum primo eſſe an numerus N ſit vel impariter par vel pariter par, ſi prius inter ſigna ambigua anteriora ſuperius eſt ſeligendum, ſi poſterius, ſignum valebit inferius. tum ratione ſignorum ambiguorum parentheſi incluſorum obſeruandum eſt, ſuperius valere ſi m eſt numerus impar, id eſt, ſi nodus a puncto medio c vel primus vel tertius vel quintus

tus etc. deſideratur, inferius autem ſignum adhibendum erit, ſi m ſit numerus par ſiue ſi nodus vel ſecundus, vel quartus, vel ſextus quaeratur.

II. Nodi ſinguli fere aequaliter a ſe inuicem diſtant, praeſertim nodi circa medium poſiti, accuratius autem rem conſiderando nodorum interualla alternis vicibus tantillum creſcunt et decreſcunt a medio verſus extremitates; internallorum autem proximorum bigae continuo decreſcunt.

III. Vt habeatur diſtantia vltimi nodi ab extremitate; faciendum eſt $2m = N$; ſicque primo reperitur $x = \frac{N-1}{2N-1} l - \frac{l}{(2Nq-q)(e^{\frac{1}{2}q}\sqrt{2}+1)}$ = proxime $\frac{N-1}{2N-1} l - \frac{l}{41(2Nq-q)}$ = proxime $\frac{120N-110}{240N-119} l$; ſi haec quantitas ſubtrahatur ab $\frac{1}{2} l$, reperietur diſtantia quaeſita $= \frac{101}{480N-238} l$.

§. XVII. Quod in ſuperiori paragrapho praeſtitimus pro prima oſcillationum claſſe, in quibus numerus nodorum par eſt, ſimili modo pro ſecunda claſſe ſeu numero nodorum impari efficitur. Tunc autem, ſi numerus nodorum ad vtramque partem rurſus dicatur N, et exponens nodi, cuius poſitio determinanda eſt, ſit m incipiendo a puncto medio C, ita vt nodus primus dicatur ille qui puncto C eſt proximus, ſecundus qui hunc ſequitur et ita porro; his, inquam, factis denominationibus, dico fore pro ſecunda oſcillationum claſſe:

$$x = \frac{2ml}{2N-1} + \frac{l}{(2Nq-q)\times\left(\pm(\mp)e^{\frac{(2N-4m-1)q}{2}}\sqrt{2}-1\right)}$$

quae quidem formula altera pro prima oſcillationum claſ-

ſe data non differt, niſi quod hic habeatur $m + \frac{1}{2}$, quod ibi eſt m; neque id difficulter praeuideri potuiſſet, ſi animum attendiſſemus, quod cum nodus ſit in ipſo puncto medio C, qui aequaliter pertinet ad vtramque partem CB et CD, poſſit exponens nodi reſpectu figurarum ad primam claſſem pertinentium cenſeri $m + \frac{1}{2}$. Caeterum hic inter ſigna ambigua priora $\pm$ ſuperius ſeligendum eſt, cum numerus $N + 1$ eſt pariter par, inferius cum eſt impariter par, et inter ſigna ambigua poſteriora ($\mp$) ſuperius accipiendum eſt cum m eſt numerus impar et inferius cum m eſt numerus par.

§. XVIII. Ex comparatione vtriusque formulae, qua determinauimus diſtantias nodorum a puncto medio C, apparet poſſe vtramque eadem aequatione comprehendi; ſit ſcilicet N qualiscunque numerus integer, erit

$$x = \frac{Ml}{2N-1} + \frac{l}{(2Nq-q) \times \left(\pm (\mp) e^{\frac{2N-2M-1}{2}q}\sqrt{2} - 1\right)}$$

Pro hac autem formula notandum erit M exprimere duplum nodi exponentem, ſi numerus omnium nodorum eſt impar, et ſi iſte numerus par ſit tunc M exprimemere duplum nodi exponentem vnitate diminutum; quia vero ſignorum ambiguorum diiudicatio non ita concinna eſt, vtemur potius formulis praecedentium paragraphorum. En igitur nodorum tabellam pro figuris hic appoſitis, in qua tota laminae longitudo ponitur 1000 partium.

Pro figura prima

C*f* vel C*e* = 280

*f*D vel *e*B = 220

Pro

Pro ſigura quarta
C*f* vel C*e* = 369
*f*D vel *e*B = 131
Pro ſigura ſecunda
C*h* vel C*g* = 144
C*f* vel C*e* = 407
hf vel *ge* = 263
*f*D vel *e*B = 93
Pro ſigura quintæ
C*h* vel C*g* = 223
C*f* vel C*e* = 427
hf vel *ge* = 204
*f*D vel *e*B = 73
Pro ſigura tertia
C*m* vel C*l* = 91
C*h* vel C*g* = 274
mh vel *mg* = 183
C*f* vel C*e* = 440
hf vel *ge* = 166
*f*D vel *e*B = 60

§. XIX. Atque ſic apparet locos nodorum pro quouis nodorum numero ſiue pari ſiue impari quanta ſufficit accuratione determinari poſſe, quae res potiſſimum ad inſtitutum noſtrum pertinebat.

Nihil vero addo de aliis modis, quibus ſoni a lamina elaſtica elici poſſunt, quorum aliquos §. III. expoſui, cum nunc manifeſtum ſit, quemadmodum vibrationes animo ſint vbique concipiendae et quomodo deinceps calculus earum ſit inſtituendus. Iam itaque manum de tabula remouebo, poſtquam ea, quae in hoc noſtro argu-

argumento phyſica ſunt, experimentis confirmauero. Duplici enim ratiocinio hactenus dicta eruimus, altero phyſico, quo ſtatuimus vibrationes laminae liberae et percuſſae iis fieri modis, quos figurae noſtrae indicant; altero pure geometrico, ſupra omnem dubitationem poſito. Ratiocinium autem phyſicum quamuis non dubitem, quin vni cuique ſtatim ſit plane probabile, non poterit tamen pro certo haberi, priusquam id experimentis fuerit confirmatum; Spero itaque non ingratum fore, ſi hic appoſuero experimenta, quae inſtitui et obſeruationes quas feci circa diuerſos ſonos diuerſimode e laminis elicitos, iis praeſertim, quibus geometria non ſatis imbutis experimenta inſtar demonſtrationum ſunt.

Experimenta et Corollaria Phyſica.

Virgis vſus ſum cylindricis vitreis diuerſarum longitudinum et craſſitierum: craſſiſſimae diameter quatuor lineis paullo maior erat; At vero qui noſtra imitari volet experimenta melius faciet virgas adhibendo chalybeas; cylindricas vero prismaticis praefero, quod in illis oſcillationes eaedem ſint in quocunque plano fiant: Atque cum talibus virgis cylindricis ſequentia inſtitui experimenta.

I. Virgam duobus extremis digitis in certo loco apprehendi pendulamque ſuſtinui, tumque eam claue, quam altera detinebam manu percuſſi: Sonum edidit virga percuſſa vel obſcurum, oppreſſum, ilico extinctum, vel clarum, liberum, diutiusque durantem; haecce duo ſonorum genera ab inuicem differunt, vt ſoni campanae medio diffiſſae a Sonis campanae integrae Ex

Ex hac obſeruatione ſtatim indicaui, ſonum diſtinctum et clarum tunc eſſe, cum virga in nodo aliquo digitis apprehenderetur, obſcurum vero et ſuppreſſum fieri, cum locus attactus nodo nulli reſponderet. In hac ſententia mox confirmatus ſui.

II. Deinde ſucceſſiue virgam a medio verſus extremitatem alterutram per omnia loca apprehendi totiesque altera manu percuſſi; tum vero loca illa, quibus ſonum clarum ſonorumque percipiebam notaui, eorumque diſtantiis ab extremitate acceptis iisdemque collatis cum menſuris in tabula XVIII. exhibitis, conſenſum egregium deprehendi: hic tamen notandum eſt, loca iſta latitudinem aliquam habere, cum ſoni poſt minimam digitorum mutationem non ſtatim totam ſuam plenitudinem vel accipiant vel deperdat.

III. Dum experimentum ita inſtituerem, vt modo dictum eſt, obſeruaui ſonos praefatos nunc fieri acutiores; cuius rei rationem intelliges, ſi primo ſingas virgam digitis apprehenſam in *l* figurae tertiae, ſumta ſcilicet C*l* 91 part. (vid. tabell. §. XVIII.) tuncque ſonus exprimetur numero 86, 305 vid. §. XIV. Deinde ſi ſumas diſtantiam a puncto medio C 144 part. habebis punctum *g* figurae ſecundae, ſonusque reſpondebit numero 34, 545; tum vero ſac diſtantiam a puncto medio C 223 part. reſpondebit iſte locus puncto *g* figurae quintae ſonusque erit vt 57, 105: Poſtea diſtantiam illam ſume 274 part. habebis punctum *g* figurae tertiae, rurſusque ſonum 86, 305 et ſic porro.

Nota Sonos fieri poſſe a nimia virgae longitudine vel nimis breui ita graues aut acutos vt percipi amplius

non poſſint: Sonus autem maxime grauis, qui a virga percuſſa edi poteſt, reſpondet figurae primae ſumta B*e* vel D*f* = 220 partium: obſeruaui porro virgam vitream, cuius diameter erat 3 lin. longitudo 8. poll. ſonum edidiſſe *f*, qui intra minutum ſecundum facit circiter 600 vibrationes; quod ſi igitur ſtatuamus ſonum acutiſſimum qui diſtingui poſſit, ſoni *f* eſſe octauam triplicem, ſeu efficere oſcillationes 4800 intra minutum ſecundum, ſequitur virgulam vitream 3 lineas in diametro habentem ſonum diſtinctum nullo modo edere, cum eſt breuior duobus pollicibus cum decem lineis. Si deinde aſſumatur ſonus grauiſſimus perceptilis eſſe ſub octauam triplicem ſoni *f*, dicendum erit virgam vitream tres lineas craſſam, 22 poll. longiorem etſi in puncto debito *e* vel *f* figurae primae apprehenſum ſonum amplius non edere: Quia vero poſitio puncti *g* figurae tertiae non differt notabiliter a poſitione puncti *e* figurae primae, ideo tunc potius auditur ſonus figurae tertiae reſpondens, qui ſe habet ad ſonum figurae primae vt 86305 ad 6345 ſeu proxime vt $13\frac{1}{2}$ ad 1.

IV. In virgis longioribus ſaepe fit vt duo ſoni ſimul diſtincte percipiantur: quamuis vnus altero paullulum diſtinctiot et clarior; Id vero oritur a proximitate nodorum ad diuerſas figuras relatorum quae proximitas nodorum, quorum numerus ſenarium tranſcendit, facile contingit.

V. Praefatum phaenomenon ſemper contingit cum virga puncto medio C apprehenditur, quia punctum iſtud medium commune eſt figurae quartae, quintae et reliquis omnibus ad claſſem ſecundam pertinentibus, adeo

vt

vt ſimul infiniti ſoni producantur, quorum autem communiter duo tantum aut tres ſunt perceptibiles ob nimiam acutiem vel grauitatem reliquorum

Haec ita ſe habent cum virga vnico in puncto detinetur; ſequuntur nunc experimenta, cum virga ſimul duobis vel pluribus in locis cohibetur.

VI. Si virga in duobus, tribus, vel quot quot adſunt nodis ſimul cohibeatur, ſemper orietur ſonus clarus, et ſi vel vnico in loco extra poſitionem nodi detineatur, ſonus illico ſuffocabitur ita v. gr. in figura quinta notentur puncta *e*, *g*, C, *h*, *f*, ad normam tabellae §. XVIII. atque in ſingulis punctis virga detineatur, ita tamen vt obices appoſiti angulo acuto virgam coërceant, ſonus clarus percipietur talisque et idem permanebit ſi obicem vnum alterumue remoueas; ſed opprimetur ſonus ſi locus obicis cuiuscunque notabiliter mutetur. Notandum tamen hic eſt, poſtquam nodi ex tabella notati in virga fuerint, tum demum loca vera experimentis accuratius eſſe exploranda, quod facile fiet, ſi nodum vnum poſt alterum inquiras; haecque tantilla correctio neceſſaria eſt, quia virgae raro ſunt plane vniformiter craſſae et elaſticae, tum etiam quod tabellae numeri non ſint ita accurrati, quin vna alteraue particula deficere poſſint; Denique virgarum craſſities, cuius nullam rationem fecimus, tum ſonos tum nodorum loca aliquantillum mutare poſſunt.

VII. Denique experimenta feci circa ſonos laminae diuerſis modis vibratae: primo nempe exploratis nodis *e* et *f* in figura prima ſiue calculo ſiue tentando, virgam in nodis iſtis detentam percuſſi ſonumque quantum potui

conſonum in clauicymbalo obſeruaui ; idemque deinde feci ratione nodorum et ſonorum reliquis figuris reſpondentium ; tum collatos inter ſe ſonos numeris expreſſi et mihi ſane viſum eſt poſt crebra tentamina , ſonos iſtos quam proxime ſe habere vt indicatur § XIV. ita v. gr. diſtincte percepi ſonum figurae quartae eſſe ſoni figurae primae vndecimam minorem plusquam completam, quod idem et indicat tabella ſonorum exhibita §. XIV.

Fateor tamen quod in virgis chalybeis craſſiusculis aliquando ſoni progrediendo a grauiſſimis ſonis ad acutiores , hi in ratione paullo maiori creuerint quam tabella indicat , quod maximam partem craſſitiei virgae , ad quam nullam attentionem fecimus , adſcribo : quo enim ſunt virgae craſſiores , eo acutiorem ſonum edunt ; craſſities autem quamvis eadem ſit in eadem virga , tamen in minoribus nodorum diſtantiis ſonum magis intendere poteſt , quam cum nodi maiori interuallo a ſe inuicem diſtant.

DE

DE DESCENSV CORPORVM SVPER PLANO INCLINATO ASPERO

AVCTORE
L. Euler.

§. 1.

Eadem principia, ex quibus in ſuperiori diſſertatione motum corporum ſuper plano horizontali aſpero, quatenus is a frictione turbatur, determinaui atque explicaui, multo latius patent, eorumque ope plurima alia phaenomena motuum corporum exponi et euolui poſſunt. In hac quidem diſſertatione conſtitui vſum iſtorum principiorum ante ſtabilitorum oſtendere in motu corporum ſuper plano inclinato deſcendentium definiendo, in quo negotio pariter frictionis rationem maxime ſpectari oportet. Singularia autem in hoc motu phaenomena deprehenduntur, quorum conſenſus cum concluſionibus ex memoratis principiis deductis vniuerſae theoriae veritatem maxime corroborabit, quae confirmatio reſpectu eorum, qui nexum veritatum tam diſtincte intueri non valent, haud exigui momenti eſt exiſtimanda. Etſi enim leges motus, vnde haec deducuntur, aeque ſunt neceſſario verae, ac regulae quibus in arithmetica et geometria vtimur, tamen quemadmodum in arithmeticis operationibus probationes adhiberi ſolent, ita in mechanicis, concluſiones ex principiis deriuatas per experimenta comprobari conuenit. Tab. IV.

§. 2. Phaenomena, quae in deſcenſu corporum ſuper plano inclinato occurrunt, potiſſimum huc redeunt,

vt alia corpora radendo, alia rotando deſcendere obſervemus, atque in motu rotatorio inſignis deprehenditur differentia, prout cum eo motus progreſſiuus vel magis vel minus permiſcetur. Vti hoc argumentum de motu ſuper plano inclinato ad mechanicam elementarem refertur, ita quoque in ſyſtemata Phyſicae eſt traductum, paſſimque regulas Auctores tradere ſunt conati, ex quibus iudicare liceat, quibus caſibus corpora cum radendo tum rotando ſint deſcenſura. Has autem regulas omnes Cel. Profeſſor Krafft ſumma in experimentis capiendis ſollertia, erroris conuicit, neque vllam regulam tam pro motu radente, quam pro rotatorio veritati conſentaneam deprehendit: hincque Vir praeſtantiſſimus anſam arripuit tam per plurima experimenta quam per ratiocinium veras naturae leges eruendi. Idem negotium Vir Cel. Daniel Bernoulli eſt aggreſſus, atque a priori ſolam ratiocinii vim ſecutus easdem plane elicuit regulas, quas experientia ſuppeditauerat.

§. 3. Quoniam igitur video Viros acutiſſimos diuerſas vias eſſe ingreſſos, quibus ſcopum intentum attigerint, non ſolum actum non agere arbitror, ſi meam methodum, qua idem negotium abſolui, dilucide expoſuero; ſed etiam meo quidem iudicio perfectioni Theoriae maxime conſulitur, quo plures viae ad eandem veritatem ducentes detegantur atque ad vſum accommodentur. Etſi enim omnes ad eundem terminum collineant, tamen aliae aliis longius deducunt, atque ad alias veritates non minus cognitione dignas aditum pateſaciunt. Quae cum ita ſint, idem hoc argumentum a Viris nominatis iam pertractatum mea methodo expediam, ea ſcilicet ipſa

ipſa, quam in praecedente diſſertatione de motu corporum ſuper plano horizontali aſpero expoſui. Omnino enim vis methodi in hoc conſiſtit, vt quantum datae vires corpus ſollicitantes in motu eius tam progreſſiuo quam rotatorio cum generando tum alterando valeant, aſſignare poſſimus. Has autem regulas, quas natura in huiusmodi motibus mixtis conſtantes obſeruare debet, cum in ſuperiori diſſertatione fuſe expoſui, tum alibi ſummo rigore demonſtratas dedi.

§. 4. Si deſcenſum corporum ſuper plano inclinato in genere contemplemur, primum omnium perſpiciemus motum rotatorium, ſi quem corpus in deſcenſu ſuper plano inclinato recipit, ab alia cauſa praeter frictionem proficiſci non poſſe. Sublata enim frictione corpus plano inclinato impoſitum a ſolo ſuo pondere ad motum incitatur, cuius vis directio, cum per centrum grauitatis corporis tranſeat, alium motum niſi progreſſiuum in corpore generare non valet. Namque ſi vim grauitatis, qua corpus cietur, more conſueto reſoluamus in binas laterales, quarum alterius directio ſit plano inclinato parallela, alterius vero ad id normalis; prior vis tota ad corpus mouendum impenditur, et quia per centrum grauitatis tranſit ad motum rotatorium generandum omnino erit inepta. Poſterior autem vis tota ab immobilitate plani abſorbetur, neque alium effectum producit, niſi appreſſionem corporis ad planum, vnde pariter nullus motus rotatorius reſultare poteſt. Super huiusmodi igitur plano tam perfecte polito, vt omni frictione careat, etiam globus perfecte rotundus ſine vllo motu rotatorio deſcendere deberet: quod non magis experientiae ad ver

ſari

ſari putandum eſt, quam confectio eiusmodi plani laeuigatiſſimi, omni frictione carentis.

§. 5. Conſideremus ergo corpus ELMD plano in-
Fig. 7. clinato immobili ita impoſitum, vt baſi ED planum contingat, ſit autem hoc corpus adhuc in quiete, in quo ſtatu perpetuo eſſet permanſurum, niſi a vi externa, cuiusmodi eſt grauitas ad motum impelleretur. Accedat igitur grauitas, qua corpus in directione verticali G P deorſum ſollicitatur, erit haec vis vtique aequalis ponderi corporis, quod ſit $= P$, eiusque directio GP tranſibit per centrum grauitatis corporis G. Reſoluatur haec vis P corpus in directione GP ſollicitans in duas laterales, quarum alterius directio ſit recta G H parallela plano AB, alterius vero GFN normalis ad AB, erit, vti conſtat, illa vis $\frac{AC}{AB} \cdot P$ haec vero $= \frac{BC}{AB} \cdot P$, ducta B C horizontali, ac AC verticali. Effectus ergo grauitatis in hoc conſiſtet, vt corpus primum ſollicitetur in directione GH a vi $= \frac{AC}{AB} \cdot P$, ac praeterea in directione GN a vi $= \frac{BC}{AB} \cdot P$. Harum virium ſi poſterior $\frac{BC}{AB} P$ in directione ad planum AB normali agens ſola adeſſet, tum vtique corpus in ſuo ſitu perpetuo quieſceret, ſi quidem recta GF intra baſin DE, qua corpus planum contingit cadat, hocque caſu effectus vis $\frac{BC}{AB} P$ in ſola preſſione conſumetur, qua corpus in planum AB normaliter aget premendo vi $= \frac{BC}{AB} P$, idque actu ad motum cieret, niſi eſſet immobile: Sin autem normalis G F extra baſin DE cadat, tum corpus in eam partem procumbet in quam recta GF cadit.

§. 6.

§. 6. Altera autem vis $\frac{AC}{AB}.P$, cuius directio eſt GH, quia planum AB eius actioni non obſtat, corpus actu promouebit in directione GH eique motum progreſſiuum inducet. Quamdiu enim corpus eſt in quiete frictio plani, quantacunque ea ſit, nullum effectum exerit, at ſtatim ac corpus ELMD a vi $\frac{AC}{AB}.P$ moueri incipit, reſiſtentia frictionis ſubito aderit, corpusque in directione oppoſita DA retrahet. Quamobrem niſi vis promouens $\frac{AC}{AB}P$ maior fuerit, quam frictio, corpus in directione GH promoueri non poterit. Neque vero frictio ſoli motui progreſſiuo quem vis $\frac{AC}{AB}P$ in corpore producere conatur, reluctatur ſed etiam, quoniam eius directio DA non per centrum grauitatis corporis G tranſit, corpori motum rotatorium circa axem per centrum grauitatis eius G tranſeuntem atque ad planum ACB normalem imprimere annitetur, actuque imprimet, niſi magnitudo baſis DE, aliaeque circumſtantiae poſt exponendae hunc effectum impediant Quoniam enim corpus non eſt liberum, ſed plano immobili AB incumbit, non ſufficit ad motum rotatorium generandum vim rotatorium adeſſe, ſed etiam tantam eſſe oportet, vt obſtacula ab immobilitate plani AB oriunda ſuperare valeat.

§. 7. Ante omnia igitur quantitatem frictionis, quam corpus, ſtatim ac motu ſuo planum radere incipit, ſentit, determinari oportet. In praecedente quidem diſſertatione expoſui, quemadmodum frictionem ſuper plano horizontali aſpero per experimenta explorare oporteat, neque autem hanc frictionem in praeſenti caſu adhibere licet, eo quod corpus non toto ſuo pondere pla-

no inclinato incumbit, hincque minorem frictionem patiatur neceſſe eſt. Tam ratio enim quam experientia docet, quo maiori vi idem corpus contra idem planum aſperum apprimatur, frictionem in eadem ratione augeri debere. Quare cum vis, qua corpus ad planum inclinatum apprimetur, conſtet ſitque $= \frac{BC}{AB}.P$, poterimus huius principii ope ex frictione corporis ſuper plano AB ſecundum horizontem diſpoſito, quantitatem frictionis inferre, quam idem corpus ſuper eodem plano inclinato patietur. Sit igitur F frictio, quam planum AB horizontale factum corpori ELMD ſibi impoſito obiicit, quod frictio horizontalis appellari ſolet: quoniam hoc caſu preſſio aequalis eſt ponderi toti P, erit frictio eiusdem corporis ſuper plano inclinato $AB = \frac{BC}{AB}.F$.

§. 8. Antequam inueſtigemus vnde motus rotatorius proueniat, atque an corpus ELMD motum rotatorium ſit concepturum? ponamus corpus hoc ſolo motu progreſſiuo ſuper plano inclinato deſcendere ſeu ad corporum claſſem pertinere in quibus vis frictionis nullum motum rotatorium producat, etſi ad huc ignoramus, in quo ratio huius rei ſit poſita. Primum igitur manifeſtum eſt hoc corpus ad motum incitari non poſſe, niſi vis vrgens $\frac{AC}{AB}.P$ maior ſit frictione $\frac{BC}{AB}.F$, hoc eſt niſi ſit $\frac{AC}{BC} > \frac{F}{P}$. Quoniam igitur $\frac{AC}{BC}$ exponit tangentem anguli eleuationis plani ABC, poſito ſinu toto $= 1$, patet quamdiu anguli ABC tangens minor fuerit quam $\frac{F}{P}$, tum corpus perpetuo in quiete eſſe permanſurum: ſimulac vero inclinatio plani AB tanta ſtatuatur, vt eius tangens excedat valorem $\frac{F}{P}$ corpus deſcendere incipere. Hinc deducitur

tur facilis modus frictionem horizontalem F per planum inclinatum explorandi, ab Illuſtri Bilfingero adhibitus: notetur enim angulus B, quo corpus tantum non ſuper plano inclinato deſcendere incipit, quo per experimenta inuento erit frictio horizontalis $F = \frac{AC}{BC} \cdot P$.

§. 9. Ponamus itaque eſſe $\frac{AC}{BC} > \frac{F}{P}$, atque corpus ſuper plano inclinato actu deſcendet. Inceperit ergo corpus deſcenſum ſuum ex puncto ſummo A, atque iam peruenerit in M abſoluto ſpatio $AM = x$. Ponatur eius Fig. 8. celeritas in M debita altitudini v, et quia in directione MB ſollicitatur vi $= \frac{AC}{AB} P$, in eadem vero retardatur vi $= \frac{BC}{AB} \cdot F$, erit vis acceleratrix corporis in directione $MB = \frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB} \cdot \frac{F}{P}$, propter maſſam corporis ſimulque pondus $= P$. Ex his dum corpus per elementum dx progreditur erit $dv = (\frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB} \cdot \frac{F}{P}) dx$ hincque $v = \frac{(AC.P - BC.F) x}{AB.P}$. Deſcendet igitur corpus frictione non obſtante motu vniformiter accelerato, et aequalibus temporibus aequalia celeritatis incrementa capiet. Cui phaenomeno ſi experientia aduerſari videatur, cauſa aberrationis aperte in reſiſtentia aeris deprehenditur, quae cum ſit quadrato celeritatis proportionalis vniformem accelerationem maxime perturbat. Sublata autem reſiſtentia aeris, corpus abſoluto ſpatio AB celeritatem acquiret tantam, quantam in vacuo, libero lapſu adipiſceretur per altitudinem $= AC - BC. \frac{F}{P}$.

§. 10. Videamus iam quid requiratur ad hoc, vt Fig. 9. corpus motum progreſſiuum, quem determinauimus, purum proſequi poſſit neque rotationi ſeu prouolutioni ſit obnoxium. Videmus autem a frictione oriri momentum

tendens ad corpus in ſenſum MDE conuertendum circa axem horizontalem per centrum grauitatis G tranſeuntem et ad planum ACBG normalem, hocque momentum eſſe $= \frac{BC}{AB} F. GF$; quare corpus ſine prouolutione progredietur ſecundam directionem GMH, ſi iſtud momentum impeditur, quominus in effectum deducatur. Ponamus per hoc momentum corpus iam ita procline ad voluendum eſſe factum, vt ſoli baſeos extremitati D innitatur, atque tantum non incipiat circa D circumagi. In hoc ſtatu, tota preſſio $\frac{BC}{AB}. P$, quam corpus in planum AB exerit in vnicum punctum D colligetur, ita corpus in ſolo puncto D planum AB premat normaliter tota ſua vi $\frac{BC}{AB} P$, et niſi planum reſiſteret, hac vi corpus actu ad motum impelleretur. Cum igitur plani firmitas hanc vim deſtruat, idem eſt acſi, ſublato plano, corpus indirectione DQ ad AB normali vrgeretur vi $= \frac{BC}{AB}. P$, cuius momentum reſpectu axis per centrum grauitatis G tranſeuntis eſt $= \frac{BC}{AB} P. GQ = \frac{BC.DF}{AB}. P$, atque directe repugnat momento ſuperiori ex frictione orto.

§. 11. In hoc igitur corpus verſabitur ſtatu, vt a quatuor viribus ſollicitetur, quarum prima in directione GH eſt $= \frac{AC}{AB}. P$, ſecunda in directione GF eſt $= \frac{BC}{AB} P$ tertia in directione DA eſt $= \frac{BC}{AB}. F$, et quarta in directione DQ eſt $= \frac{BC}{AB}. P$. Binae priores quia earum directiones per centrum grauitatis transeunt ad motum rotatorium nihil conferunt; tertia autem conatur corpus in eam ipſam plagam rotare, in quam rotari debet, ſi vllus

vllus motus rotatorius actu ſubſequitur, eiusque momentum eſt $= \frac{BC.GF}{AB}.F$. Quartae vis effectus huic motui rotatorio eſt contrarius, eiusque momentum eſt $= \frac{BC.DF}{AB}.P$. Quamobrem niſi illud momentum maius ſit quam hoc, motus rotatorius nullus producetur; hincque corpus motu radente ſeu motu progreſſiuo puro ſecundum directionem GH progredietur, ſi fuerit $\frac{BC.DF}{AB}.P > \frac{BC.GF}{AB}.F$ hoc eſt ſi ſit $\frac{DF}{GF} > \frac{F}{P}$. Ducta autem ex centro grauitatis G ad baſis extremitatem infimam D recta GD, erit $\frac{DF}{GF}$ tangens anguli DGF; quoties itaque tangens anguli DGF maior fuerit quam $\frac{F}{P}$ poſito ſinu toto $= 1$, toties corpus motu progreſſiuo ſolo ſuper plano inclinato deſcendet, dummodo fuerit $\frac{AC}{BC} > \frac{F}{P}$, alioquin enim corpus perpetuo in quiete perſiſteret.

§. 12. Faciliime itaque iudicare poterimus, vtrum datum corpus ſuper plano inclinato deſcenſurum ſit motu radente puro, an vero voluendo: ad hoc ſcilicet tantum attendere debemus, vtrum $\frac{DF}{GF}$ ſeu tangens anguli DGF maior ſit an minor fractione $\frac{F}{P}$. Priori enim caſu, quo $\frac{DF}{GF} > \frac{F}{P}$ corpus motu progreſſiuo puro deſcendet; caſu que poſteriore, quo $\frac{DF}{GF} < \frac{F}{P}$ ſimul motum rotatorium recipiet. Quoniam in hoc criterio eleuatio plani inclinati ſeu angulus ABC non ineſſe deprehenditur, perſpicuum eſt, quod corpus in vna plani eleuatione ſine prouolutione deſcendat, idem in omni alia eleuatione quacunque ſine prouolutione eſſe deſcenſurum; hocque plurima experimenta a Cel. Profeſſore Krafft inſtituta conſtanter comprobauerunt. Neque igitur in iudicio hac de-

re ferendo ſpectari oportet rectam verticalem ex centro grauitatis corporis ductam, vtrum ea extra baſin an intra cadat; vti aliquibus auctoribus placuit; ſed ex ſolo angulo D G F totum iudicium eſt petendum.

§. 13 Si igitur frictio horizontalis F adaequet pondus corporis abſolutum P, tum ſit fractio $\frac{F}{P} = 1$ quae eſt tangens anguli 45°. Hoc igitur caſu corpus E L M D motu progreſſiuo puro deſcendet, ſi angulus D G F maior fuerit ſemi recto. Si frictio horizontalis F fuerit ad pondus P vti 1 ad 2, ideoque $\frac{F}{P} = \frac{1}{2}$, quae fractio eſt tangens anguli 26°, 34′; in hac ergo hypotheſi, niſi angulus D G F maior fuerit angulo 26°, 34′, corpus ſine prouolutione deſcendere nequit. Sin autem frictio horizontalis F ſubtripla ponderis P. quae ratio vulgo in lignis obſeruari ſolet, erit $\frac{F}{P} = \frac{1}{3}$, et angulus taugentem habens $= \frac{1}{3}$ erit = 18°, 26′: ex quo angulum DGF maiorem eſſe oportet 18°, 26′, ſi quidem corpus ſine rotatione daſcendere debeat. Si planum A B data opera fuerit politum, pariter ac baſis corporis D E tum fere deprehenditur $\frac{F}{P} = \frac{1}{4}$, eritque adeo $\frac{F}{P}$ tangens anguli 14°, 2′, corpus igitur ſolo motu radente deſcendet ſi angulus D G F maior fuerit quam 14°, 2′. Ex his facile erit de parallelepipedo iudicare, vtrum motu radente, an voluente ſuper plano inclinato ſit deſcenſurum; et ſi figura fuerit minus regularis cognito loco centri grauitatis totum iudicium abſoluetur.

§. 14 Operae autem praetium erit corpora priſmatica, quorum ſectiones ad axem normales ſint polygona regularia ſeorſim perpendere; quae vel ex materia vniformi conſtent, vel ſaltem ſuum grauitatis centrum in medio

dio axis poſitum habeant. Huiusmodi igitur prisma ita imponatur plano inclinato, vt eius axis ſitum teneat horizontalem. Repraeſentet figura D H I K L E eiusmodi Fig. 10. prisma, cuius ſingulae ſectiones ſint polygona regularia n laterum. Erit ergo angulus $DGF = \frac{180}{n}$ graduum. ex quo eiusmodi prisma ſine prouolutione deſcendet ſi fuerit tangens anguli $\frac{180°}{n}$ maior quam $\frac{F}{P}$. Caſu itaque quo $\frac{F}{P} = 1$, prisma triangulare tantum ſine rotatione deſcendet; quadrangulare enim iam in ipſo termino prouolutionis verſatur. Sin $\frac{F}{P} = \frac{1}{2}$. numerus laterum minor eſſe debet quam 7, vt deſcenſus ſine prouolutione abſoluatur. At ſi $\frac{F}{P} = \frac{1}{3}$ priſma polygonum 9 laterum adhuc radendo deſcendet, quae autem plura habent latera voluentur. Sit denique $\frac{F}{P} = \frac{1}{4}$, atque ex ſuperioribus cocluditur, prismata polygona pauciorum quam 13 laterum omnia ſine motu rotatorio eſſe deſcenſura.

§ 15. Quoniam igitur inuenimus, quomodo corpus comparatum eſſe oporteat, vt motu progreſſiuo ſolo deſcenſum abſoluat; ſimul intelligimus, quibus caſibus motus rotatorius corpori deſcendenti inferatur. Quoties Fig. 9. ſcilicet fractio $\frac{DF}{GF}$ minor fuerit fractione $\frac{F}{P}$, corpus deſcendere non poterit, quin ſimul voluatur. Quod ſi ergo perpendiculum GF, quod ex centro grauitatis G in planum inclinatum AB demittitur, in ipſum baſis extremitatem deorſum ſpectantem D cadit, tum ob $DF = 0$, corpus ſemper motum rotatorium recipiet, niſi ipſa frictio F fuerit nulla: quo tamen caſu in ipſo rotationis termino erit conſtitutum. Sin autem perpendiculum GF adeo extra baſin infra D cadat, tum ob $\frac{DF}{GF}$ negatiuum

ide-

ideoque nihilo minus, corpus voluetur, etiamſi frictio omnino euanuerit. In hoc autem ſtatu corpus ne quidem ſuper plano horizontali conſiſtere poterit, propterea quod perpendiculum ex centro grauitatis demiſſum extra baſin cadit: ſed ſtatim prolabetur; quod quidem ex primis ſtaticae principiis eſt manifeſtum. Super plano inclinato autem accedit momentum vis proſternentis $\frac{EC.DF}{AB}$.P, quod quia fit negatiuum, ſolum motum rotatorium generabit.

§. 16. Perſpicuum autem eſt, niſi corpus fuerit rotundum, eiusque axis ſitum horizontalem teneat, motum rotatorium vehementer fore irregularem. Statim enim ac motus rotatorius incipit, tum corpus in ſolo puncto
Fig. 10. D plano innitetur, et circa hoc punctum conuertetur, donec alia facies puta DH plano inclinato applicuerit; hocque, quia cum impetu euenit, ſimul ex percuſſione mutatio in corporis motu orietur; rotatio vero circa angulum D ſubito ſiſtetur, et corpus vel ſine motu rotatorio moueri perget, vel circa ſequentis baſis extremitatem H motum rotatorium nanciſcetur. Turbabitur ergo deſcenſus huiusmodi corporum continuis ſaltibus, atque adeo percuſſionibus, ita vt motus nullo modo ad expreſſiones algebraicas vniformes reuocari queat; ſed continuo dum alia baſis plano inclinato ſe aplicat, nouo calculo erit opus; haecque operatio eo erit difficilior, quo magis corpus a figura rotunda recedat.

Fig. 11. §. 17. Perſequamur igitur praecipue corpora rotunda, in quibus motus rotatorius ſine ſubitaneis alterationibus locum habere poteſt. Incumbat ſcilicet huiusmodi corpus rotundo ita plano inclinato AB vt eius axis ſit ho-

horizontalis, atque ad planum verticale ACB normalis; huius porro corporis rotundi centrum grauitatis G poſitum in medio axis puncto, partesque corporis vtrinque ſitae ſint inter ſe aequales et ſimiles; praeterea vero axis ſit permanens, vt corpus circa eum libere rotari poſſit, quemadmodum in praecedente diſſertatione expoſuimus. Exponat circulus LMD vel ſectionem axi normalem per centrum grauitatis G factam, vel aliam quamcunque maximam, qua corpus planum contingit. Sit igitur huius ſectionis radius $GD = c$, et pondus corporis maneat vt ante $= P$ eiusque momentum inertiae reſpectu axis ſit $= Pbb$. Vidimus autem ſupra huius momenti valorem pro praecipuis ſpeciebus corporum rotundorum: ſi nempe corpus fuerit cylindrus ex materia vniformi conſtans, tum erit $bb = \frac{1}{2}cc$; et ſi corpus fuerit vel globus, vel ſphaeroides ellipticum pariter vniforme erit $bb = \frac{2}{5}cc$. Denique ſit F frictio horizontalis huius corporis rotundi, quam ſentiret ſuper plano AB horizontali motu radente ſolo promotum.

§. 18. Inceperit hoc corpus deſcenſum ſuum ſuper plano inclinato AB ex A. vbi initio in quiete fuerit conſtitutum, perpendiculo GD in A incidente: abſolueritque iam ſpatium $AD = x$. In ſtatu hoc praeſente duplicem habebit motum, progreſſiuum et rotatorium: ſit igitur celeritas motus progreſſiui, qua centrum grauitatis G indirectione GH parallela plano AB progreditur debita altitudini v: celeritas vero rotatoria, qua punctum quoduis periphaeriae M circa axem G in plagam Mm D circumfertur, debita ſit altitudini u. Dum igitur corpus motu progreſſiuo pergit per elementum ſpatii Gg

$= dx$, punctum M motu angulari in m perueniet, vt ſit $Mm = \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$. Celeritas autem puncti D, qua planum in directione DB radet, erit $= \sqrt{v} - \sqrt{u}$; ideoque interea radet per elementum $= (1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}) dx$. Quoniam igitur effectus frictionis, quae eſt $= \frac{BC}{AB} F$, dato tempuſculo proportionalis eſt ſpatiolo, per quod frictio exercetur, erit frictionis vis, dum corpus per elementum dx progreditur, non $\frac{BC}{AB}.Fdx$ ſed $= \frac{BC}{AB}(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})Fdx$; qua corpus in directione DA retrahetur.

§. 19. A pondere autem corporis P corpus in directione GH ſollicitatur vi $= \frac{AC}{AB}.P$, ad planum vero apprimitur in directione GD vi $= \frac{BC}{AB}P$, quam planum ita abſorbet, vt inde nulla vis ad corpus rotandum reſultet eo quod interuallum DF euaneſcit. Accelerabitur igitur corpus in directione GH vi acceleratrice $\frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB}(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\frac{F}{P}$. Motus autem rotatorius a ſola frictione accelerabitur, eritque vis acceleratrix, qua punctum M dum per Mm rotatur, $= \frac{BC}{AB}(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\frac{Fcc}{Pbb}$. Ponatur anguli ABC ſinus $= m$, coſinus $= n$, ita vt ſit $mm + nn = 1$ poſito ſinu toto $= 1$; erit $\frac{AC}{AB} = m$ et $\frac{BC}{AB} = n$. Per effectum igitur ſollicitationum momentanearum habebimus has duas aequationes

$$dv = m\,dx - n(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\frac{Fdx}{P}$$

$$du = n(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\frac{Fccdx\sqrt{u}}{Pbb\sqrt{v}}$$

Ex quibus aequationibus integrando colligi poterit corporis in quouis loco tam motus rotatorius quam progreſſiuus: integratio autem ita perfici debet vt poſito $x = 0$ tam $\sqrt{v}$ quam $\sqrt{u}$ euaneſcat; quoniam corpus in A motum ex quiete inchoaſſe ponimus.

§. 20.

§. 20. Quia tres habemus variabiles x, u, et v, earum vnam eliminari oportet: commodiſſime autem x eliminatur, quoniam in vtraque aequatione tantum dx ineſt. Prior autem aequatio dat $dx = \frac{P\,dv\sqrt{v}}{mP\sqrt{v} - nF\sqrt{v} + nF\sqrt{u}}$; poſterior vero aequatio dat $dx = \frac{Pbbvdu}{nFcc\sqrt{vu} - nFccu}$; vnde inter v et u hanc acquirimus aequationem $\frac{dv}{mP\sqrt{v} - nF\sqrt{v} + nF\sqrt{u}} = \frac{bbdu\sqrt{v}}{nFcc\sqrt{vu} - nFccu}$, quae poſito $\frac{bb}{cc} = k$ abit in $nFdv\sqrt{vu} - nFudv = kmPvdu - knFvdu + knFdu\sqrt{vu}$. Cum haec aequatio ſit homogenea ponamus $v = ttu$, vt ſit $dv = ttdu + 2tudt$, factaque ſubſtitutione habebimus iſtam aequationem: $nFut^3du + 2nFt^2u^2dt - nFttudu - 2Fnftuudt = kmPttuduk - nFttudu + knFtudu$, quae peracta variabilium ſeparatione tranſit in hanc: $\frac{2nFttdt - 2nFtdt}{kmPtt - knFtt + knFt - nFt^3 + nFtt} = \frac{du}{u}$, ſiue diuiſione per t inſtituta in hanc $\frac{du}{u} = \frac{2nFtdt - 2nFdt}{-nFtt + (kmP - knF + nF)t + knF}$.

§. 21. Ad hanc aequationem integrandam ponamus breuitatis gratia $kmP - knF + nF = 2gnF$, ita vt ſit $g = \frac{kmP - knF + nF}{2nF}$ eritque $\frac{du}{u} = \frac{2dt - 2tdt}{tt - 2gt - k}$, quae ob $tt - 2gt - k = (t - g + \sqrt{(gg + k)})(t - g - \sqrt{(gg + k)})$, abit in $\frac{du}{u} = \frac{\frac{g - 1 - \sqrt{(gg+k)}}{\sqrt{(gg+k)}}dt}{t - g + \sqrt{(gg+k)}} \; \frac{-\frac{g + 1 - \sqrt{(gg+k)}}{\sqrt{(gg+k)}}dt}{t - g - \sqrt{(gg+k)}}$ cuius integrale eſt $lu = lC + \frac{g - 1 - \sqrt{(gg+k)}}{\sqrt{(gg+k)}}\,l(t - g + \sqrt{(gg+k)}) - \frac{g + 1 - \sqrt{(gg+k)}}{\sqrt{(gg+k)}}\,l(t - g - \sqrt{(gg+k)}) = lC + \frac{g - 1}{\sqrt{(gg+k)}}\,l\frac{t - g + \sqrt{(gg+k)}}{t - g + \sqrt{(gg+k)}} - l(tt - 2gt - k)$. A logarithmis iam ad numeros concludendo erit $u(tt - 2gt - k) = C\left(\frac{t - g + \sqrt{(gg+k)}}{t - g + \sqrt{(gg+k)}}\right)^{\frac{g-1}{\sqrt{(gg+k)}}}$ atque loco t reſtituendo $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$ erit $v - 2g\sqrt{vu} - ku = C\left(\frac{\sqrt{v} - g\sqrt{u} + \sqrt{u(gg+k)}}{\sqrt{v} - g\sqrt{u} - \sqrt{u(gg+k)}}\right)^{\frac{g-1}{\sqrt{(gg+k)}}}$. Ad conſtantem C ad noſtrum

ſtrum caſum accommodandam, ponamus $u = 0$ quod initio motus euenit, eritque $v = C$; quoniam vero et hoc caſu eſt $v = 0$, erit $C = 0$; ideoque $v - 2g\sqrt{vu} - ku = 0$. Ex qua aequatione oritur vel $\sqrt{v} = (g + \sqrt{(gg + k)})\sqrt{u}$ vel $\sqrt{v} = (g - \sqrt{(gg + k)})\sqrt{u}$. Manifeſtum autem eſt priorem tantum aequationem locum habere poſſe, quia in deſcenſu vtraque celeritas $\sqrt{v}$ et $\sqrt{u}$ eſt affirmatiua.

§. 22. Cum igitur poſito $g = \frac{kmP - knF + nF}{2nF} = \frac{mbbP - nbbF + nccF}{2nccF}$ ſit $\sqrt{v} = (g + \sqrt{(gg + k)})\sqrt{u}$: perpetuo in deſcenſu corporis ſuper plano AB motus progreſſiuus ad motum rotatorium eandem conſeruabit rationem: eritque in ſingulis locis celeritas corporis progreſſiva $\sqrt{v}$ ad celeritatem rotatoriam $\sqrt{u}$ vti $g + \sqrt{(gg + k)}$ ad 1 ſeu vti k ad $\sqrt{(gg + k)} - g$, exiſtente $k = \frac{bb}{cc}$. Si igitur fuerit $\frac{F}{P} = \frac{1}{3}$ pro cylindro ob $k = \frac{1}{2}$ erit $g = \frac{3m + n}{4n}$ et $\sqrt{(gg + k)} = \frac{\sqrt{(9mm + 6mn + 9nn)}}{4n}$; ideoque $\sqrt{v} : \sqrt{u} = 3m + n + \sqrt{(9mm + 6mn + 9nn)} : 4n$. Eadem vero hypotheſi pro globo vel ſphaeroide elliptico, ob $k = \frac{2}{5}$ erit $g = \frac{6m + 3n}{10n}$ et $\sqrt{(gg + k)} = \frac{\sqrt{(36mm + 36mn + 49nn)}}{10n}$ hincque fiet $\sqrt{v} : \sqrt{u} = 6m + 3n + \sqrt{(36mm + 36mn + 49nn)} : 10n$. Quod ſi ergo eleuatio plani fuerit angulus ſemirectus, erit $m = n$; hocque caſu fiet $\sqrt{v} : \sqrt{u} = 20 : 10 = 2 : 1$. Globus igitur ſuper plano ad angulum ſemirectum eleuato ita deſcendet, vt eius celeritas progreſſiua vbique duplo maior ſit celeritate rotatoria, ſiquidem ſit $\frac{F}{P} = \frac{1}{3}$.

§. 23. Perpetuo autem corporis rotundi ſuper plano inclinato deſcendentis celeritas progreſſiua maior erit quam celeri-

celeritas rotatoria; eoque maior erit differentia, quo magis planum ad horizontem inclinatur, ſeu quo maior ſiat angulus ABC. Nam ſi angulus B omnino euaneſcat ſeu planum AB ſiat horizontale, erit $m = 0$ et $n = 1$, ideoque $g = \frac{1-k}{2}$, et $\sqrt{(gg+k)} = \frac{1+k}{2}$ ex quo oritur $\sqrt{v} : \sqrt{u} = 1 : 1$, nempe hoc caſu corpus perfecte quieſcet, et vterque motus erit nullus. Si angulus B ſit infinite paruus, ita vt ſit m quantitas infinite parua manente $n = 1$ erit $g = \frac{1-k}{2} + \frac{kmP}{2F}$ ideoque $\sqrt{(gg+k)} = \frac{1+k}{2} + \frac{(1-k)kmP}{2(1+k)F}$; et $g + \sqrt{(gg+k)} = 1 + \frac{kmP}{(1+k)F}$; quare fiet $\sqrt{v} : \sqrt{u} = 1 + \frac{kmP}{(1+k)F} : 1$. Quando autem planum AB in ſitum verticalem eleuatur, tum ob $n = 0$ ſit $g = \infty$, ideoque celeritas progreſſiua $\sqrt{v}$ infinities erit celeritate rotatoria maior: hoc ſcilicet caſu corpus ſolo motu progreſſiuo deſcendet. Nullo autem caſu inter medio fieri poteſt $\sqrt{u} = \sqrt{v}$, ad hoc enim requiritur vt ſit $k = 1 - 2g$ ſiue $\frac{kmP}{nF} = 0$, quod nusquam niſi in ſitu horizontali euenit.

§. 24. Comparatis binis celeritatibus inter ſe poterimus quoque ad quoduis ſpatium abſolutum $AD = x$ motum corporis aſſignare: Cum enim ſit $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = \frac{\sqrt{(gg+k)}-g}{k}$ fiet ex prima aequatione $dv = m\,dx - n\left(\frac{g+k-\sqrt{(gg+k)}}{k}\right)\frac{F\,dx}{P}$ quae integrata dat $v = mx - \frac{n(g+k-\sqrt{(gg+k)})Fx}{kP} = \frac{x}{kP}(kmP - ngF - knF + nF\sqrt{(gg+k)})$ ſeu $v =$

$$\frac{x(kmP - (1+k)nF + \sqrt{(k^2m^2P^2 + 2(1-k)kmnFP + (1+k)^2nnF^2)})}{2kP}$$

cognita autem pro ſpatio percurſo x celeritate progreſſiua $\sqrt{v}$, ſimul innoteſcit celeritas rotatoria $\sqrt{u}$ ex aequatione $\sqrt{u} = \frac{\sqrt{(gg+k)}-g}{k}\sqrt{v} = \frac{\sqrt{(k^2m^2P^2 + 2(1-k)kmnFP + (1+k)^2nnF^2)} - (1-k)nF - kmP}{2knF}\sqrt{v}$

 Hinc

Hinc perſpicitur dum angulus B euaneſcit ob $m = 0$ fore $v = 0$, hocque caſu ſolo corpus non deſcendet, nam quamprimum planum tantillum eleuatur, prodit $v = \frac{mx}{1+k}$. Hincque adeo conſtat frictione motuque rotatorio non obſtante, corpus motu vniformiter accelerato eſſe deſcenſurum.

§. 25. Determinato corporum rotundorum motu mixto ex progreſſiuo et rotatorio, quo ſuper plano inclinato deſcendunt, pauca quaedam de motu corporum non rotundorum ſed ſuperficiebus planis terminatorum afferamus, non vt totum motum proſequamur, quod opus eſſet fere inſuperabile, ſed tantum vt initium motus cognoſcamus. Quemadmodum enim corpora rotunda ſtatim deſcendere incipiunt ac planum AB ad horizontem minimum inclinatur; corpora vero motus rotatorii expertia ante non deſcendunt, quam $\frac{AC}{BC}$ maior fiat quam $\frac{F}{P}$; ita in reliquis corporibus certus ac determinatus dabitur terminus eleuationis plani in quo corpus deſcendere incipiat. Sit igitur corpus DELK, quod initio plano inclinato AB ita inſedit, vt eius facies DE plano eſſet applicata, iam autem percurſo ſpatio $AD = x$, peruenerit in ſitum quem figura repraeſentat. Scilicet baſis DE, quae initio planum AB tangebat, ab eo remota ſit angulo ADE, qui angulus continuo fiet maior, donec alia ſuperficies ſequens DK plano applicetur, quod cum euenit motus rotatorius prior ſubito ſiſtetur, corpusque vel motu radente ſolo progredietur, vel motum angularem circa ſequentem angulum K concipiet. Perſequemur autem hic tantum motum rotatorium primum natum, qui eousque durat, quoad facies DK ſe plano applicet.

§. 26.

§. 26. Sit igitur angulus ADE $= s$, qui ſimul oſtendit, quantum corpus iam ab initio motus circa axem horizontalem per centrum grauitatis G ductum ſit circumactum: at demiſſo ex centro grauitatis G in baſin DE perpendiculo GF ſit angulus DGF $= f$. Quodſi iam ex G in planum AB demittatur perpendiculum Gf, erit angulus FG$f = s$, ideoque angulus DG$f = f - s$, ex quo erit $\frac{Df}{DG} =$ ſin. $(f - s)$ et $\frac{Gf}{DG} =$ coſ. $(f - s)$. Ponatur DG $= c$, ſitque celeritas corporis progreſſiua, qua centrum grauitatis G in recta GH parallela plano AB progreditur debita altitudini v, celeritas vero qua punctum D circa axem corporis per centrum grauitatis G ductum rotatur, debita altitudini u Dum autem corpus hac celeritate rotatur centrum grauitatis G a plano AB recedere debet, hocque fiet celeritate $=$ ſin. $(f-s) \sqrt{u}$; quem centri grauitatis motum ſeorſim contemplabimur, cum eius motum progreſſiuum ſecundum directionem GH non afficiat. Erit igitur porro celeritas, qua punctum D verſus B progreditur $= \sqrt{v} - \sqrt{u}$; ideoque ſi frictio horizontalis fuerit $=$ F erit frictio quam corpus in hoc ſtatu ſentiet $= (1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}) \frac{BC}{AB} \cdot F$, qua corpus in directione DA retrahetur. Ponamus autem vt ante $\frac{AC}{AB} = m$, et $\frac{BC}{AB} = n$, ita vt ſit $mm + nn = 1$.

§. 27. Sit corporis maſſa ſeu pondus $=$ P eiusque momentum inertiae reſpectu axis G, circa quem gyratur $=$ Phh, erit vis qua corpus in directione GH vrgetur $= m$P, vis autem in directione normali G$f = n$P. Hinc itaque corpus in directione GH accelerabitur vi acceleratrice $= m - n (1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}) \frac{F}{P}$. Atque ſi ſimul vim plani, quae corpus a plano repellit, quoniam punctum D

D non intra planum AB ingredi poteſt, in computum ducamus, qua vtique reactio plani in D, quae per ſe eſt $= n$P, augetur idemque ratiocinium adhibeamus quo vſi ſumus in praecedente diſſertatione, oportebit ibi loco F ſcribi $n\,\mathrm{F}\,(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})$ et loco P, nP; quibus ſurrogatis erit vis accelerans motum rotatorium in D $=$

$$\frac{n\,\mathrm{DG}\,(\mathrm{F}(1-\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\mathrm{G}f - \mathrm{P\,D}f)}{\mathrm{P}(bb + \mathrm{D}f^2)} = \frac{nc^2(\mathrm{F}(1-\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\,\mathrm{cof.}(f-s) - \mathrm{P}\,\mathrm{ſin.}(f-s))}{\mathrm{P}(bb + cc(\mathrm{ſin.}(f-s))^2)}$$

Dum autem centrum grauitatis G in directione GH per ſpatiolum dx progreditur, punctum D motu angulari abſoluet ſpatium $= \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$ verum quia interea angulus ADE $= s$ elemento ds augetur: fiet $c\,ds = \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$; ideoque $dx = \frac{c\,ds\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$.

§ 28. Ex effectu iam ſollicitationum momentanearum coſequuntur binae ſequentes aequationes.

$$dv = m\,dx - n\left(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}\right)\frac{\mathrm{F}\,dx}{\mathrm{P}} = \frac{m\,c\,ds\sqrt{v}}{\sqrt{u}} - \frac{n\mathrm{F}c\,ds\sqrt{v}}{\mathrm{P}\sqrt{u}} + \frac{n\mathrm{F}c\,ds}{\mathrm{P}}$$

$$du = \frac{nc^3(\mathrm{F}(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\,\mathrm{cof.}(f-s) - \mathrm{P}\,\mathrm{ſin.}(f-s))\,ds}{\mathrm{P}(bb + cc(\mathrm{ſin.}(f-s))^2)}$$

Prior aequatio in hanc transmutatur $dv = m\,dx - \frac{n\mathrm{F}\,dx}{\mathrm{P}} + \frac{n\mathrm{F}c\,ds}{\mathrm{P}})$ cuius integrale eſt $v = m\,x - \frac{n\mathrm{F}x}{\mathrm{P}} + \frac{n\mathrm{F}cs}{\mathrm{P}}$. Hae autem aequationes etſi in ſe intractabiles videntur; tamen pro ipſo motus initio ex iis idoneae concluſione, formari poterunt. Ponamus ad hoc $v = \alpha s + \beta ss$ et $u = \gamma s + \delta ss$ erit $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = \sqrt{\frac{\gamma + \delta s}{\alpha + \beta s}} = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} + \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)s}{2\alpha\sqrt{\alpha\gamma}}$ ſ erit porro ob s minimum $\mathrm{cof.}(f-s) = \mathrm{cof.}f + s\,\mathrm{ſin.}$ et $\mathrm{ſin.}(f-s) = \mathrm{ſin.}f - s\,\mathrm{cof.}f$: quibus in prima aequatione ſubſtitutis fit $dv = \alpha ds + 2\beta s ds = c\,ds(m - \frac{n\mathrm{F}}{\mathrm{P}})$

($\sqrt{}$

$\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} + \frac{(\beta\gamma - \alpha\delta)s}{2\gamma\sqrt{\alpha\gamma}}\right) + \frac{nFc\,ds}{P}$ ex quo erit $\alpha = \left(m - \frac{nF}{P}\right) c\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} + \frac{nFc}{P}$. Poſterior vero aequatio neglecto etiam s dabit $\gamma\, ds = \frac{nc^3(F(1-\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}})\,\text{coſ.}\, f - P.\,\text{ſin.}\, f)ds}{P(bb + cc(\text{ſin.}\, f)^2)}$ ſeu $Pbb\gamma + Pcc\gamma(\text{ſin}\, f)^2 = nFc^3\,\text{coſ.}\, f - nFc^3\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}.\,\text{coſ.}\, f - nPc^3.\,\text{ſin.}\, f$.

§. 29. Prior aequatio dat $\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} = \frac{\alpha P - nFc}{(mP - nF)c}$, ſeu $\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} = \frac{(mP - nF)c}{\alpha P - nFc}$ vnde fit $\gamma = \frac{(mP - nF)^2 cc\alpha}{(\alpha P - nFc)^2}$; qui valor in altera aequatione ſubſtitutus dabit $\frac{P(bb + cc(\text{ſin.}\, f)^2)\alpha cc(mP - nF)^2}{(\alpha P - nFc)^2} = nFc^3\,\text{coſ.}\, f - nPc^3\,\text{ſin.}\, f - \frac{nFc^4(mP - nF)\,\text{coſ.}\, f}{\alpha P - nFc}$. Sit $\alpha P - nFc = z$ fiet $(bb + cc(\text{ſin.} f)^2)(mP - nF)^2 nFc + (bb + cc(\text{ſin.} f)^2)(mP - nF)^2 z = nFczz\,\text{coſ.}\, f - nPczz\,\text{ſin.}\, f - nFcc(mP - nF)z\,\text{coſ.}\, f$. Ponatur porro $z = (mP - nF)t$ fiet $tt = \frac{nFcct\,\text{coſ.} f + (bb + cc(\text{ſin.} f)^2)(mP - nF)t + (bb + cc(\text{ſin.} f)^2)nFc}{nFc\,\text{coſ.} f - nPc\,\text{ſin.} f}$

Ex hac aequatione valor ipſius t inuentus praebebit valorem ipſius z, hocque cognito innoteſcet α, indeque porro β. Sin autem ſtatim ponamus $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} = r$, atque c ſin. $f = DF = p$, et coſ. $f = GF = q$, ita vt ſit $pp + qq = cc$, fiet primo initio $\frac{dv}{du} = rr$ hinçque reperietur
$$r = \frac{mP(bb + pp) - nF(bb + pp - cq) + \sqrt{(nnF^2(bb + pp + cq)^2 - 2mnFP(bb + pp)(bb + pp - cp) + m^2P^2(bb + pp)^2) - 4nnFP(bb + pp)cp)}}{2nFcq - 2nPcp}$$
quamprimum ergo $(mP - 2nF)r + nF$ incipit maius eſſe quam o, tum corpus deſcendere incipiet, et ſi fuerit $Fqr - Ppr > Fq$ corpus quoque rotari incipiet. Eſt autem $Fq > Pp$, quia alioquin corpus ſolo motu progreſſiuo deſcendit, quem caſum ante euoluimus.

§. 30 Ex eadem aequatione pro r inuenta ſi ponatur $\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = \omega$ ita vt ſit $dv = \frac{(mP - nF)dx + nF\omega dx}{P}$, ac primo quidem motus initio $du = \frac{nc^2(Fq - Fn\omega Pp)ds}{F(bb + pp)}$; reperietur inuertendo $\omega =$

$$\frac{nF(bb + pp - cq) - mP(bb + pp) + \sqrt{(nnF^2(bb + pp + cq)^2 - 2mnFP(bb + pp)(bb + pp - cq) + m^2P^2(bb + pp)^2) - 4nnFP(bb + pp)cq)}}{2nF(bb + pp)}$$

Ex hac aequatione intelligitur fore $dv = 0$, ſi ſit $mq = np$ ſeu angulus ABC = ang. DGF, hoc ergo caſu corpus quieſcet, ſi quidem fuerit $\frac{p}{q} < \frac{F}{P}$. Statim vero ac angulus ABC incipiet ſuperare angulum DGF, corpus motum adipiscetur progreſſiuum ſimulque rotatorium ad progreſſiuum datam rationem tenentem. Si enim ponatur $mq = np$ oritur $\omega = \frac{nF - mP}{nF}$, ex quo ſit $dv = 0$ et $du = 0$. Quibus igitur caſibus quoduis corpus, quo motu radente ſolo deſcendere nequit, motu mixto deſcendere incipiat, ex his facile colligitur.

§. 31. Omnis ergo quaeſtio de motu corporum ſuper plano inclinato bipartita erit, primum enim quaeritur, vtrum corpus ſit deſcenſurum, an vero in quiete permanſurum, tum vero, ſi conſtet corpus deſcendere debere, formabitur altera quaeſtio, quomodo deſcenſus fiat, vtrum motu radente puro, an motu mixto ex radente et voluente. Hae igitur quaeſtiones pro quouis
Fig. 13 caſu oblato facile decidentur. Impoſitum enim ſit plano
et 14. inclinato ABC corpus DKLE, cuius frictio horizontalis ſit ad proprium pondus vt PR ad RQ, ſicque conſtituatur angulus PQR cuius tangens erit $\frac{F}{P}$. Deinde ex corporis centro grauitatis G in baſin DE, qua incumbit plano, demittatur perpendiculum GF, atque ab extremitate baſis infima D ad G ducatur recta DG vt obtineatur

tur angulus DGF. His duobus angulis PQR et DGF cognitis, qui ab eleuatione plani inclinati nullo modo pendent, duos caſus contemplari oportet: qui ſunt.

I. *Si angulus* DGF *maior fuerit angulo* PQR: corpus ſuper plano inclinato quieſcet, quamdiu angulus ABC minor fuerit angulo PQR: quod ſi autem angulus ABC maior conſtituatur quam angulus PQR, tum corpus deſcendet motu progreſſiuo puro, neque vllum motum rotatorium recipiet.

II. *Si angulus* DGF *minor fuerit angulo* PQR, corpus tamdiu tantum ſuper plano inclinato quieſcet, quamdiu angulus ABC minor fuerit angulo DGF: quamprimum vero angulus eleuationis plani ABC excedet angulum DGE, tum corpus deſcendet idque motu mixto ex radente et voluente, niſi planum AB verticaliter erigatur, quo caſu motus rotatorius prae progreſſiuo euaneſcit. In hoc ergo poſteriori caſu quo angulus DGF $<$ PQR motus nullus ſubſequetur, niſi recta verticalis ex centro grauitatis G demiſſa extra baſin ED cadat. Atque ſi in caſu poſteriori iſta recta verticalis extra baſin cadat, corpus tam radendo quam voluendo deſcendet. Secus autem res ſe habet in caſu priori, tum enim corpus deſcendere poteſt, etiamſi recta verticalis ex corporis centro grauitatis G demiſſa non extra baſin cadat: ac licet haec recta verticalis extra baſin cadat, tamen nullus ſubſequetur motus rotatorius.

DE MOTV CORPORVM SVPER PLANO HORIZONTALI ASPERO.

AVCTORE
L. Euler.

§. I.

Tab. V. In omni corpore duplicem ineſſe poſſe motum, alterum progreſſiuum alterum rotatorium tam experientia quam ipſa rei natura luculenter euincit, omnisque motus quem quidem corpus ſuscipere poteſt, vel eſt progreſſiuus tantum, vel rotatorius tantum, vel ex vtroque mixtus. Hinc vnius cuiusque corporis motum diſtincte cognoscit is, qui tam quantitatem vtriusque motus, qui in illo corpore ineſt, quam rationem determinationis perfecte aſſignare valet. Loquor hic autem de corporibus ſolidis ſeu rigidis, quae nullius motus inteſtini, quo partes corporis ſitum inter ſe mutuum mutant, ſunt capaces, vel ſaltem de talibus corporibus mihi ſermo eſt, in quibus eiusmodi motus inteſtinus vel actu non datur vel non ſpectatur. Quodſi enim corpora vel fluida, vel mollia, vel flexibilia proponantur, tum ad eorum motum diſtincte intelligendum vniuscuiusque partis motum cognoſci oportet, donec perueniatur ad partes tam minutas, in quibus motus inteſtinus amplius omnino non eſt. Hocque pacto omnis motus cognitio perducitur ad duo illa motus in corpora ſolida cadentis genera, quae initio commemoraui.

§. 2. In quolibet vero corpore motus progreſſiuus tantum ineſſe dicitur, ſi omnes corporis partes aequali

ve

velocitatis gradu ſecundum eandem directionem quouis temporis puncto ferantur. In iſtum motum duplex cadit mutatio cum ratione celeritatis, tum ratione directionis, et quamdiu celeritas non mutatur, motus vocatur aequabilis ſeu vniformis; quamdiu autem directio manet eadem, motus eſt rectilineus, quo ſingulae corporis partes in lineis rectis progrediuntur. Sin autem tam celeritas quam directio iugiter immutetur, naſcitur motus inaequabilis curuilineus. Atque ex his perſpicitur natura motus aequabilis in directum facti, quippe in quo tam celeritas quam directio manet eadem. Huiusmodi motum reſpicit prima lex Mechanicae, qua motus huismodi aequabilis et in directum tendens ex ipſa corporum natura perpetuo inuariatus conſeruari ſtatuitur ita vt vi huius legis nulla mutatio tam in celeritate quam in directione euenire queat, niſi quae a cauſis externis proficiscatur.

§. 3. Praecipuum autem ad quod hic attendi conuenit, eſt quod iſta haec prima mechanicae lex ad omnis generis corpora ſiue ſolida ſiue fluida ac ſitus partium mutui mutationem patientia aeque pateat. Si enim corpus fluidum motum habeat progreſſiuum vniformiter in directum tendentem, tum eius ſingulae particulae aequalibus celeritatibus in directionibus inter ſe parallelis progrediuntur, atque vnaquaeque particula iſtum motum propter vim inſitam inertiae perpetuo inuariatum conſeruare annititur. Neque vero reliquae corporis particulae ambientes iſti conſeruationi ſtatus aduerſabuntur, cum ipſae aequali velocitate et in eadem directione vel praecedant vel ſequantur vel vtrinque ad latera incedant.

 Hoc-

Hocque modo fit, vt quaelibet particula in ſuo ſtatu perſeuerare queat, ſaluo omnium reliquarum particularum ſtatu; ſicque ob perſeuerantiam cuiusque particulae in ſtatu ſuo, ſimul totum corpus in ſtatu ſuo permanebit, atque adeo figuram ſuam, quoniam omnes partes eundem inter ſe ſitum mutuum retinent, inuariatam conſeruabit, id quod euenire non poſſet, ſi omnes particulae neque aequali celeritate, neque ſecundum eandem directionem incederent.

§. 4. Motus rotatorius eſt, quo corpus circa axem aliquem fixum ſiue per ipſum corpus tranſeuntem ſiue extra corpus ſitum conuertitur. In hoc igitur motu quaelibet corporis particula in plano ad illum axem normali ita mouebitur, vt circa eum arcum circularem deſcribat. Cum itaque totum corpus circa hunc axem ſimul conuertatur, celeritas cuiusque particulae erit diſtantiae ipſius ab axe proportionalis, directio vero poſita erit in plano ad axem normali, eritque perpendicularis ad radium ex ipſa particula ad axem normaliter ductum. Ex cognita ergo celeritate vnius corporis particulae per regulam auream inuenitur celeritas reliquarum omnium particularum. Quod autem ad directionem attinet, ea duobus tantum modis determinatur, cum corpori circa datum axem gyrando duae ſolum viae pateant vel dextrorſum nempe vel ſiniſtrorſum. Data ergo poſitione axis directio motus duplici tantum modo eſt poſſibilis vel in dextram plagam vel in ſiniſtram, quarum altera alteri e diametro eſt oppoſita.

§. 5. Manente ergo poſitione axis eadem in motu rotatorio alia mutatio euenire non poteſt, niſi ratione celeritatis, eo quod directio in ſui contrariam ſubito mutari

tari nequit. At vero axis pluribus mutationibus eſt obnoxius, niſi in eodem ſitu fixo retineatur. Primum enim motu progreſſiuo quocunque moueri poteſt, ac deinde etiam ipſe motu rotatorio ferri poteſt, ex quo motus corporis ſummopere perturbatus enaſci videtur. Interim tamen eiusmodi motus quantumuis complicatus ſemper reſolui poteſt in motum progreſſiuum, et motum rotatorium circa quempiam axem fixum, ſaltem pro temporis interuallo minimo: fieri enim vtique poteſt vt alio tempore rotatio circa alium axem abſoluatur. Iſta autem reſolutio pluribus modis inſtitui poteſt, licet enim in eiusmodi motu concipere motum progreſſiuum quemcunque, ac praeterea motum circa quempiam axem fixum, qui duo motus illum ipſum motum, qui in corpore actu ineſt, repraeſentent. Quare cum haec reſolutio innumeris modis pro arbitrio inſtitui queat, diligenter cauendum eſt, ne reſolutionem praeter rationem inſtituamus, ſed ita, vt verus motus non ſolum facilius percipi, ſed etiam ad normam legum mechanicae tractari atque examinari queat.

§. 6. Ponamus igitur quo penitius naturam motus rotatorii introſpiciamus, corpus aliquod circa axem quemcunque, cui firmiter ſit alligatum, gyrari: atque manifeſtum eſt ſingulas corporis partes, quia in lineis non rectis ſed circularibus mouentur, vi ſua propria in hoc motu permanere non poſſe; ſed dum conantur in directum progredi, vim exercere ab axe recedendi, in quo vis centrifuga conſiſtit. Hamobrem neceſſe eſt, vt ſingulae corporis partes tanta vi cum axe ſint connexae, vt vis centrifuga iſtud vinculum ſuperare non valeat;

ſi

ſi ergo partes corporis ſint diſſolutae, ſingulas quaſi ope fili ſatis fortis ad axem alligatas eſſe oportet, ſin autem corpus fuerit ſolidum, ita vt eius partes inter ſe omnes firmiter ſint connexae, tum ſufficit vt totum corpus vnico filo cum axe ſit connexum, quod omnibus viribus, quibus ſingulae eius partes ab axe recedere conantur, aequiualeat. His igitur filis motus partium circularis conſeruabitur, celeritas autem nullo modo afficietur. Ex quo per primam mechanicae legem ſequitur, in eiusmodi motu rotatorio celeritatem, qua corpus rotatur, perpetuo eandem conſeruari debere, neque in celeritate mutationem vllam oriri poſſe niſi a cauſa externa.

§. 7. Si igitur corpus ſolidum, cuius partes firmiter inter ſe cohaerent, axi cuipiam fixo fuerit alligatum, hocque corpus circa iſtum axim a cauſa quacunque impetrauerit motum rotatorium; tum vi propria inertiae hunc motum rotatorium perpetuo eadem cum celeritate conſeruabit, niſi a viribus externis eius celeritas vel augeatur vel diminuatur. Interea vero corpus ob vim centrifugam ex motu omnium partium curuilineo reſultantem vim exeret in axem, eumque vel promouere vel inclinare conabitur, hancobrem axem tanta vi in ſitu ſuo detineri oportet, vt promotioni ſeu inclinationi ſatis reſiſtere valeat. Pendet iſta vis, quam axis ſuſtinet, partim ab eius poſitione reſpectu corporis partim ab ipſa corporis celeritate, hincque vel multo maior vel multo minor fieri poteſt. Fit autem calculo docente minima haec vis, ſi axis per centrum grauitatis corporis tranſeat, in quo ſitu ſi vllam vim ſentit, ea non ad promouendum ſed tantum ad inclinandum axem tendit. Fieri autem adeo poteſt,

vt

vt haec vis inclinans, ſi axis per centrum grauitatis corporis tranſit, prorſus euaneſcat, hocque caſu nulla vi opus erit ad axem in ſitu ſuo detinendum, ſed etiam ſi non ſit fixus, ſuo ſponte in eodem perpetuo ſitu perſeuerabit.

§. 8. Apparet ergo quid requiratur, vt corpus ſolidum circa axem quempiam, qui nulla vi in ſitu ſuo detineatur, libere gyrari queat. Primum ſcilicet neceſſe eſt, vt axis ille per centrum grauitatis corporis tranſeat: deinde etiam inſuper opus eſt: vt vires inclinantes, quae ex viribus centrifugis partium corporis oriuntur, ſe mutuo prorſus deſtruant. Quodſi ergo corpus circa talem axem conceperit motum rotatorium, tum hunc motum eadem velocitate perpetuo conſeruabit, neque vlla opus erit vi externa quae axem rotationis in ſitu ſuo retineat. Sic globus ex materia homogenea confectus circa quemvis axem per centrum grauitatis tranſeuntem libere gyrabitur, quia ob perfectam vndique ſimilitudinem nulla vis extat, quae axem inclinare conetur. Axem hac proprietate praeditum vocabo axem permanentem, atque huiusmodi axium inueſtigatio plerumque eſt maxime difficilis: primarium caſum notaſſe ſufficiat, quo axis per centrum grauitatis ductus ſimul per ſingularum corporis ſectionum ad axem normalium centra grauitatis tranſit: tum enim ea gaudebit proprietate, quae ad axem permanentem requiritur.

§. 9. Corpus igitur, quod circa huiusmodi axem permanentem ſemel adeptum eſt motum rotatorium, hunc ipſum motum perpetuo conſeruabit vniformem, neque vllam patietur ſiue in celeritate ſiue in poſitione

 axis

axis alterationem, ſi quidem a nulla vi externa ſollicitetur. Interea vero axis iſte, circa quem fit rotatio in perfecta quiete perſeuerabit, ob vires centrifugas partium corporis ſe inuicem penitus deſtruentes. Corpus igitur per vim inertiae duplicem motum conſtanter in ſe ſuſcipere ac perpetuo retinere valet, alterum progreſſiuum aequabilem in directum, atque alterum rotatorium circa axem per centrum grauitatis tranſeuntem ac permanentem. Intelligitur autem corpus non ſolum ſeorſim vtrumque motum recipere poſſe, verum etiam coniunctim, ex quo ſequitur haec lex mechanicae maximi momenti: *Omne corpus, cuius partes cunctae firmiter inter ſe cohaerent, praeter motum progreſſiuum aequabilem in directum etiam motum rotatorium circa axem permanentem in ſe ſuſcipere, et conſtanter conſeruare valet.* Eiusmodi motus ergo erit mixtus ex progreſſiuo et rotatorio, axisque motus rotatorii motu ſibi parallelo vniformiter in directum promouebitur.

§. 10. Quemadmodum hoc caſu vterque motus tam progreſſiuus quam rotatorius ſeorſim, ſeſe in ſtatu vniformitatis conſeruat, ita etiam vterque ſeorſim poteſt conſiderari ac menſurari, perinde ac ſi alter omnino abeſſet. Sic ad motum progreſſiuum dimetiendum animum a rotatorio abducere licet, quaſi prorſus non adeſſet, atque tum celeritas atque directio vnius corporis puncti declarabit totum corporis motum. Ad hoc autem conuenit motum centri grauitatis maxime ſpectari, eo quod eius motus progreſſiuus a motu rotatorio penitus non afficitur; quare cognita centri grauitatis tam celeritate, quam directione motus progreſſiuus perfecte innoteſcit.

Si-

Simili modo motum rotatorium cognoſcemus abſtrahendo mentem a motu progreſſiuo, ſeu quod eodem redit fingendo motum progreſſiuo contrarium atque aequalem, quo pacto ſolus motus rotatorius ſupererit, qui cognoſcetur ex celeritate, qua punctum corporis dato interuallo ab axe diſtans circa axem rotatur, adiici tantum debet, in vtram duarum illarum plagarum, in quas motus rotatorius aeque fieri poteſt, actu corpus rotationem abſoluat.

§. 11. His expoſitis quae ad ſtatum corporum, in quo vi propria perſeuerare poſſunt, pertinent, videndum eſt breuiter, quemadmodum tam motus progreſſiuus quam rotatorius a viribus ſollicitantibus afficiatur atque immutetur. Quod primum quidem ad motum progreſſiuum attinet effectus, quem vires quaecunquae ſollicitantes exerunt cognoſcetur, ſi primo totum corpus in centro grauitatis concipiatur concentratum, vt inſtar puncti ſpectari queat, ac deinde omnes vires ſollicitantes in directionibus ſibi parallelis in centrum grauitatis mente transferantur. Tum enim hae vires translatae in corpus in centro grauitatis collectum eundem exerent effectum ratione motus progreſſiui, qui proinde ex primis mechanicae principiis colligi poterit. Effectus ſcilicet vel in celeritatis vel directionis vel vtriuſque ſimul mutatione conſiſtet. Scilicet ſi omnes vires reſoluantur in tangentiales et normales ad directionem motus, atque ſumma tangentialium ponatur $= T$. ſumma normalium $= N$. Tum vero maſſa corporis ſit $= M$. eiusque celeritas debita altitudini v. ac tempuſculo minimo ſpatium ds abſoluatur: erit vti conſtat $dv = + \frac{T\,ds}{M}$ atque radius oſculi

 lin-

lineae curuae, ad quam deſcribendam corpus cogitur erit $= \frac{2Mv}{N}$.

§. 12. Ad motus rotatorii autem mutationem a viribus ſollicitantibus prouenientem cognoſcendam, momentum inertiae corporis reſpectu axis rotationis cognitum eſſe debet, quod eſt ſumma omnium productorum, quae oriuntur ſi ſingula corporis elementa multiplicentur reſpctiue per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe rotationis, momentum ergo inertiae hoc erit productum ex maſſa corporis M in quadratum cuiuspiam lineae rectae quae ſit $= b$ ita vt momentum inertiae futurum ſit $= M b^2$. Deinde virium ſollicitantium momentum, tendens ad corpus circa axem rotationis conuertendum quaeri oportet, quod erit productum ex vi P in lineam quandam k ſeu erit $= P k$. Tum ſi fuerit puncti corporis ab axe rotationis diſtantis intervallo $= c$ celeritas debita altitudini u fiet $d u = \pm \frac{P k c d q}{M b b}$, dum hoc punctum motu ſuo arculum $d q$ radio c circa axem abſoluit. Si vires ſollicitantes tendant ad axem rotationis ipſum mutandum, isque non firmiter in ſitu ſuo detineatur, tum vtique axis rotationis inclinabitur, qua autem lege hoc fiat, etiamnum non eſt definitum.

§. 13. His legibus motus ad praeſens inſtitutum neceſſariis praemiſſis pergo ad motum corporum ſuper plano horizontali aſpero factum tam progreſſiuum quam rotatorium conſiderandum, quem in hac diſſertatione ex primis principiis eruere conſtitui. Ac primo quidem perſpicuum eſt grauitatem ad motum neque accelerandum nec retardandum quicquam conferre; quoniam enim eius directio ad planum horizontale normalis eſt, tota in appreſ-

preſſione corporis contra planum conſumetur. Ob hunc ipſum autem effectum grauitas in hoc negotio maxime ſpectari debet, cum ex eo quantitas frictionis determinetur, a qua, quemadmodum motus corporum ſuper plano horizontali turbetur inueſtigaturus ſum. Plura autem ſunt impedimenta, quibus motus corporum ſuper plano horizontali retardatur; namque praeter frictionem, quae ab aſperitate ſuperficiei horizontalis oritur, hirſutia ſuperficiei ideo quoque motum diminuit, quod corpus filamenta, quibus planum eſt obſitum, deprimere cogitur, id quod ſine motus diminutione fieri nequit. Praeterea vero reſiſtentia aeris motui corporis non parum obeſt, tam propter inertiam, ex qua reſiſtentia quadrato celeritatis proportionalis reſultat, quam propter tenatitatem, qua aeris particulae inter ſe cohaerent, vnde reſiſtentia gignitur conſtans ſeu momentis temporum proportionalis.

§. 14. Quo igitur facilius redardationem motus, quae ab his impedimentis tam ſingulis ſeorſim conſideratis quam omnibus coniunctis producitur, primum mentem ab omnibus abſtrahemus, vt intelligamus, cuiusmodi motus corporis eſſe debeat, ſi neque ſcabrities neque hirſutia plani, neque etiam reſiſtentia aeris vllum obſtaculum motui obiiciat. Concipiamus itaque planum horizontale perfectiſſime politum, atque ſpatium ab aëre prorſus vacuum. Sic igitur dubium erit nullum, quin corpus motum progreſſiuum, quem ſemel eſt adeptum perpetuo eundem ſit conſeruaturum, ac motu aequabili in directum ſine vlla retardatione progreſſurum. Sin autem corpus habuerit motum rotatorium circa axem per centrum grauitatis tranſeuntem ac permanentem, tum

 etiam

etiam in eodem loco haerens perpetuo eadem velocitate gyrabitur niſi forte recta verticalis per centrum grauitatis ducta extra contactum corporis cum plano cadat, quo caſu vtique grauitas peculiarem effectum ederet, eiusmodi autem ſtatum hic remouemus. Simili modo ſi corpus nactum fuerit duplicem motum, alterum progreſſiuum, alterum rotatorium circa axem permanentem, etiam vtrumque motum vniformiter in aeternum ſine vlla alteratione conſeruabit.

§. 15. Contemplemur iam planum horizontale aſperum quod per frictonem reſiſtat motui corporum ſuper eo incedentium. Sit igitur ADB corpus quodcunque huic plano impoſitum, cuius centrum grauitatis ſit in G, ex quo perpendicularis in planum demiſſa GC cadat intra baſin corporis AB, qua planum contingit. Hoc ergo corpus in iſto ſitu ſiue frictio adſit ſiue minus perpetuo perſiſtet, niſi ipſi motus imprimatur. Quodſi autem ipſi motus progreſſiuus in directione horizontali GF imprimatur, hunc motum continuare non poterit niſi planum radendo baſi ſua AB: ex quo, dum plani inaequalitatem ſuperat, frictionem patietur, qua eius motus paullatim imminuetur, donec tandem corpus ad quietem reducatur. Dum autem aequalia ſpatia percurrendo aequalia obſtacula offendit, perinde eius motus retardabitur, ac ſi vi quadam conſtante retro vrgeretur. Erit ergo frictio potentia conſtans a corporis celeritate non pendens, quae corpus, quamdiu mouetur, quaſi retrahit, eiusque motum retardat, in ipſa autem quiete, vbi omnis raſus ceſſat, ſimul frictionis effectus euaneſcit. Hoc igitur differt vis frictionis a reliquis viribus conſtantibus cuiusmodi

di eſt grauitas, quod corpora in motu ſolum poſita afficiat, motusque directioni perpetuo ſit contraria; in quiete vero omnem vim amittat.

§. 16. Manifeſtum autem eſt, dum frictio in ipſo corporis ac plani contactu mutuo AB gignitur eius directionem quoque in hoc loco eſſe poſitam; quare cum eius directio ſit motus directioni GF contraria, frictio eſt vis, qua corpus continuo, dum mouetur, in directione CO retrahitur. Loco frictionis igitur ſubſtitui licet potentiam conſtantem baſi AB corporis applicatam, atque in directione CO directioni motus GF contraria trahentem; haecque vis in locum frictionis ſubſtituenda, quamdiu corpus mouetur aequaliter motum retardare ponenda eſt, quacunque celeritate corpus moueatur; ſimulac vero corpus ad quietem fuerit redactum, tum quaſi per ſaltum omnis eius vis ſubito annihilari cenſenda eſt. Primum autem omnium intelligitur, quoniam frictionis directio non per corporis centrum grauitatis G tranſit, non ſolum a frictione motum corporis progreſſiuum retardari debere, verum etiam ex frictionis vi momentum enaſci, quod tendet ad motum rotatorium corpori circa axem horizontalem per centrum grauitatis ductum normalem ad directionem motus GF inducendum, in ſenſum DHAC, vel quod eodem redit ad corpus circa A proſternendum. Haecque adeo proſtratio actu eueniet, niſi magnitudo baſis ſit impedimento.

§. 17. Cum igitur frictio ſit vis motum retardare valens, ea cum vi grauitatis comparari, atque adeo per pondus menſurari poterit. Per experimentum autem pro quovis caſu pondus aſſignari poteſt, quod frictioni aequiualeat

leat. Ad hoc explorandum corpori ADB ſuper plano quieſcenti in baſi A alligetur filum quod in directione horizontali AV tendatur dato pondere, quod ope troch leae in V firmatae commodiſſime fieri poteſt. Quo iam corpus ADB ab hoc pondere protrahatur, neceſſe eſt vt pondus vim frictionis ſuperet; hincque manifeſtum eſt, quamdiu pondus minus ſit frictione, corpus in quiete eſſe permanſurum. Quamobrem filum AV a minimo ponduſculo incipiendo continuo maioribus tendatur, donec corpus moueri incipiat; quod eueniet, quam primum pondus quo filum AV tenditur tantillum frictionem ſuperabit. Hoc ergo pacto ſatis exacte pondus determinari poterit frictioni aequale, quo cognito effectus frictionis ad calculum reuocari poterit. Sit igitur F pondus frictioni aequiualens, atque corpus ADB dum ſuper plano OV motu radente incedit, continuo retro trahetur vi $=F$, quae corpori in ipſa baſi applicata concipienda eſt. Simili porro modo frictio cuiuscunque alius corporis per experimenta explorari poteſt; expedit autem ad hoc filum AV in corporis loco infimo applicari, vti monui, quam in ſublimiori, vt per hanc vim ſimul conatus frictionis corpus ſubuertendi deſtruatur.

§. 18. Quod ad quantitatem frictionis F attinet, ea primum ab aſperitate cum plani OV tum baſis corporis AB plurimum pendet, ita vt, quo aſperius fuerit vel alterutrum vel vtrumque, eo maior euadat frictio: hoc autem a priori commode menſurare non licet. Deinde frictio potiſſimum appreſſioni corporis ad planum reſpondet, ita vt quo maior fuerit preſſio corporis in planum, in eadem ratione frictio augeatur. Apprimitur autem corpus ad planum vi proprii ponderis, quo deorſum nititur in

in directione GC; quare, ſi corporis pondus vel minuatur vel augeatur manente eadem baſi, eademque plani aſperitate, tum frictio in eadem ratione vel minuetur, vel augebitur. Hincque explorata per experimenta vnius corporis frictione ſuper dato plano per ſolum ratiocinium infinitorum aliorum corporum frictiones colligi poterunt. Denique videatur magnitudo baſis non parum ad frictionem ſiue augendam ſiue minuendam conferre: interim tamen experimenta nullum ſenſibile diſcrimen a magnitudine baſis oriundum demonſtrant. Quodſi autem perpendamus preſſionem corporis per totam baſin diſtribui, facile percipimus ſingula baſis elementa eo minus planum premere, quo maior fuerit baſis, ideoque eo minorem frictionem ſuſtinere; ex quo ſequitur, magnitudinem baſis quantitatem frictionis prorſus non afficere debere.

§. 19. His de frictionis menſura expoſitis, facile foret retardationem motus progreſſiui, qui corpori ADB initio fuit impreſſus, pro quouis momento aſſignare, ſi modo conſtaret, corpus a frictione non proſtratum iri. Quamobrem ante nobis definiendum eſt, quibus caſibus corpus motum progreſſiuum impreſſum vsque ad quietem conſeruare queat, quibusque caſibus frictio corpus circa A ſubuertere valeat; hoc enim caſu motus reſultaret perquam irregularis. Ponamus ergo frictionem ſufficiere ad corpus proſternendum, atque corpus iam procliue eſſe ad lapſum: hoc igitur caſu corpus in ſola extremitate A plano innitetur, cum reliqua baſis pars iam incipiat eleuari, et circa A conuerti. In hoc igitur ſtatu corpus totam preſſionem in ſolo puncto A exeret, et quia preſſio aequalis eſt ponderi corporis, quod ponamus $= P$,

 pla-

planum a corpore in puncto A deorſum premetur vi $=$ P. Cum autem planum ſit immobile, per reactionem corpus tantandem vi $=$ P ſurſum vrgebit, ita vt corpus actu ſollicitetur in directione verticali ſurſum AE vi $=$ P; atque per hanc vim firmitas plani ex computo extruditur, quoniam ea aeque ac planum impedit, quominus corpus infra lineam horizontalem OV deſcendat.

§. 20. Hic ergo reductus eſt praeſens corporis ſtatus, vt plano praeter frictionem omnino ſublato corpus ADB a tribus ſollicitetur viribus, primum nempe propter grauitatem a vi P in directione DC; deinde iterum vi $=p$ in directione AE, ac tertio propter frictionem a vi $=$ F in directione CO. Videamus igitur an ab his viribus generari queat motus rotatorius circa centrum grauitatis G ſeu potius circa axem horizontalem eo tranſeuntem et normalem ad motus directionem GF, in ſenſum DHAB. Ac primo quidem vis GC $=$ P nihil confert ad motum rotatorium, quia eius directio per centrum grauitatis G tranſit; altera vero vis AE $=$ P huic motui rotatorio in ſenſum DHAB reluctatur, eandem ſcilicet reluctantiam exerceret firmitas plani OV, cuius loco vim illam P ſubſtituimus; momentum vero huius vis P ad motum rotatorium impediendum eſt $=$ P. GE $=$ P. AC. Frictio igitur ſola F in directione CO agens conabitur eiusmodi motum rotatorium corpori inducere, eiusque momentum pro hoc effectu erit $=$ F. GC. Momentum igitur actuale ad motum rotatorium gignendum erit $=$ F. GC $-$ P. AC.

§. 21. Niſi igitur hoc momentum F. GC $-$ P. AC affirmatiuum habeat valorem hoc eſt niſi $\frac{F}{P} > \frac{AC}{GC}$, motus rotatorius a frictione non producetur, ſed corpus ſolo

lo motu progreſſiuo mouebitur, donec ad quietem reducatur. Ponamus ſcilicet corpus initio, vbi perpendiculum GC in O inciderat, motum progreſſiuum nactum eſſe celeritate debita altitudini $=a$, nunc vero abſoluto ſpatio OC $=x$, celeritatem eius reſiduam eſſe debitam altitudini v. Cum iam inter vires corpus ſollicitantes nulla praeter frictionem F motum progreſſiuum afficiat, haecque motum retardet, erit $dv=-\frac{F\,dx}{P}$, denotante P maſſam ſimulque pondus corporis, ex quo fiet $v=a-\frac{Fx}{P}$. Hancobrem corpus ad quietem redigetur abſoluto ſpatio $x=\frac{aP}{F}$. Hic igitur erit motus corporis pro caſu, quo $\frac{F}{P}<\frac{AC}{GC}$; atque vt corpus, poſtquam nactum eſt motum progreſſiuum, non procumbat, neceſſe eſt, vt frictio F ad pondus P minorem habeat rationem, quam AC ad GC. Plerumque autem ſuper plano ligneo eſt $\frac{F}{P}=\frac{1}{3}$, his itaque caſibus requiritur, vt ſit $\frac{AG}{GC}>\frac{1}{3}$, ſeu angulus AGC $>18°\ 26'$. Quae proprietas quibus in corporibus locum habeat, ex poſitione centri grauitatis et baſi corporis facile intelligi poteſt.

§. 22. Ex his intelligitur nullum corpus, in quo ſit $\frac{AC}{GC}>\frac{F}{P}$, motu progreſſiuo ſolo ſuper plano OV incedere poſſe, ſed eiusmodi corpora ſimulac ipſis motus imprimitur, procumbere, motumque rotatorium cum progreſſiuo permiſcere. Quo propius ergo perpendiculum GC ex centro grauitatis corporis in planum horizontale demiſſum ad extremitatem baſis A cadit eo magis procliue erit corpus ad prolabendum, hicque conatus prolabendi eo fiet maior, quo altius centrum grauitatis G fuerit ſitum. Hinc ſi corpus fuerit priſma ex materia homogenea confectum AabB, cuius altitudo Aa ſit $=$ A, Fig. 2.

 et

et diamter baſis $AB = B$ erit perpendiculum $GC = \frac{1}{2}A$ et interuallum $AC = \frac{1}{2}B$. Hoc igitur corpus motu progreſſiuo ſuper plano OV incedere nequit, ſi fuerit $\frac{B}{A} < \frac{F}{P}$ hoc eſt ſi diameter baſis ad altitudinem minorem habeat rationem, quam frictio F ad pondus prismatis P. Quod ſi ergo frictio F aequalis fuerit tertiae parti ponderis P, tum nullum prisma cuius altitudo plus quam triplo maior eſt diametro baſis AB motu progreſſiuo ſuper plano incedere poteſt. Similique modo pyramis vel conus, cuius altitudo ad diametrum baſis maiorem habet rationem quam 9 ad 2 ſuper plano moueri non poterit, quin ſtatim procumbat.

§. 23. Videamus iam quomodo corpora prismatica, quae horizontaliter ſuper plano iacent, ſint comparata ratione motus cum progreſſiui tum rotatorii. Sumamus autem baſes huiusmodi prismatum eſſe figuras polygonas regulares, atque eiusmodi priſma in directione ad axem normali ad motum impelli. Sit numerus laterum polygoni baſin conſtituentis $= n$, eritque angulus $AGC = \frac{180°}{n}$; atque $\frac{AC}{GC} = \text{tang.} \frac{180°}{n}$ poſito ſinu toto $= 1$. Quod ſi ergo fuerit tang. $\frac{180°}{n} > \frac{F}{P}$. tum eiusmodi corpus priſmaticum motu progreſſiuo ſuper plano OV propelli poterit; ſin autem ſit tang. $\frac{180°}{n} < \frac{F}{P}$, tum ſtatim, ac impellitur, procidet, ſimulque voluendo ſe mouebitur. Si igitur frictio F aequalis fuerit ponderi P, tum prismata triangularia ſola ſine prolapſu progredientur, quae autem baſes habent quadratas indifferentia erunt ad lapſum, quorum baſes autem ſint plurium laterum, ea ſimul voluendo promouebuntur. Si $\frac{F}{P} = \frac{1}{2}$, tum prismata, quorum baſes plura habent latera, quam 6, motum rotorium recipient, et ſi $\frac{F}{P} = \frac{1}{3}$, tum ea tantum prisma-

ta

ta voluentur, quorum baſes plura quam 9 habent latera. Sin porro $\frac{F}{P} = \frac{1}{4}$, tum ea prismata ſine prouolutione moueri non poterunt, in quibus laterum numerus maior eſt quam 12.

§. 24. Quoniam igitur nouimus, quibus caſibus corpus, cui tantum motus progreſſiuus imprimitur, ob frictionem ſimul motum volutorium recipere debeat, inveſtigemus, quo pacto iſte motus rotatorius generetur et continuetur. Vidimus autem tam ex frictione quam ex reactione plani prodire momentum ad motum rotatorium circa axem per centrum grauitatis ductum producendum $= F.GC - P.AC$. Si iam ponamus corporis momentum inertiae reſpectu huius axis eſſe $= Pbb$, erit vis, qua motus angularis circa centrum grauitatis actu producitur $= \frac{F.GC - P.AC}{Pbb}$. Ad motum igitur angularem definiendum, abſtrahamus cogitationes ab motu progreſſiuo, concipiamusque centrum grauitatis corporis G in quiete, Fig. 3. atque corpus circa G ita rotari incipiet, vt punctum A radio AG moueatur per arculum Aα, perueniet igitur punctum A infra horizontalem OV, etiamſi loco firmitatis plani vim illam P ſurſum vrgentem ſubſtituerimus. Hic igitur motus propter planum impenetrabile iſto modo perfici non poterit, neque vnquam admitti poteſt motus, quo vlla corporis pars infra OV perducatur.

§. 25. Punctum igitur A motu rotatorio circa centrum grauitatis G infra planum OV demergi non poteſt, niſi planum liberrime cedat. Ponamus igitur planum cedere atque punctum A vtique in α deſcendet; ſtatim autem tribuamus plano vim ſeſe in priſtinum ſtatum reſtituendi, hincque punctum α ſurſum pellitur vi quapiam per ſpatiolum $\alpha\beta$,

 atque

atque hoc eodem tempore eueniat neceſſe eſt, quo arculum $A\alpha$ abſoluit; hoc enim modo ab hac vi ſtatim in principio motus rotatorii agente punctum A perpetuo in recta OV conſeruabitur. Sit vis iſta plani $=p$ ita vt punctum A ſeu α ſurſum vrgeatur vi $=p$: hac igitur vi totum corpus ſurſum ſollicitabitur vi acceleratrice $=\frac{p}{P}$. Per hanc vero eandem vim p motus rotatorius diminuetur, eritque momentum non amplius FGC–P.AC ſed $F.GC-(P+p)AC$, quod diuiſum per momentum inertiae corporis reſpectu axis, circa quem ſit rotatio, quod momentum inertiae ſit $=Pbb$ dat vim acceleratricem motus rotatorii $\frac{F.GC-(P+p)AC}{Pbb}$, haec vero ducta in AG dat vim acceleratricem puncti A per arculum $A\alpha$. Cum igitur ſpatia ſimul deſcripta ſint viribus accelleratricibus proportionalia erit $\alpha\beta : A\alpha = \frac{p}{P} : \frac{F.GC-(P+p)AC}{Pbb} AG = AC : AG$.

§. 26. Ex hac analogia adipiſcimur hanc aequationem $pbb = AC(F.GC-P.AC)-p.AC^2$. quae praebet vim, qua totum corpus eleuatur, ad id, vt in rotatione extremitas corporis A non infra horizontalem OV deſcendat, nempe ſit haec vis $p=\frac{AC(F.GC-P.AC)}{bb+AC^2}$. Atque iſta vis non ſolum initio motus rotatorii locum obtinet, ſed etiam pro quolibet momento, dum motus rotatorius durat, eſt enim iſta expreſſio durante motu rotatorio variabilis, cum propter perpendiculi GC tum interualli AC variabilitatem. Augetur autem primo momento perpendiculum GC elemento $\alpha\beta$, interuallum vero AC diminuitur elemento $A\beta$. Quoniam igitur initio motus rotatorii eſt $F.GC > P.AC$, multo magis durante

te motu manebit $F.GC > P.AC$, ideoque vis p affirmatiuum obtinet valorem, quamdiu interuallum AC verſus O cadit; tamdiu enim centrum grauitatis G eleuari debet, donec recta GA fiat verticalis; hoc autem caſu ob $AC = 0$, etiam vis p euaneſcit. Deinceps vero, quando recta GA verſus V inclinabitur, ob AC negatiuum, vis p negatiuum induet valorem, eaque centrum grauitatis G rurſus deprimetur, donec alia corporis facies ſeſe plano OV applicet, vicemque baſis ſuſtineat quodcum euenerit videndum eſt, vtrum ſuper noua baſi motus rotatorius de nouo generetur an ſecus.

§. 27. Ob iſtam autem vim p, quae requiritur ad centrum grauitatis corporis G cum eleuandum tum rurſus deprimendum, vis rotatoria corporis diminuetur. Eſt enim vis acceleratrix, qua extremitas A circa G circumagitur non amplius $= \frac{F.GC - P.AC}{Pbb} . AG$, ſed $= \frac{F.GC - (P + p)AC}{Pbb}$ AG, quae propter $p = \frac{AC(F.GC - P.AC)}{bb + AC^2}$ abit in $\frac{AG(F.GC - P.AC}{P(bb + AC^2)}$ Quanquam igitur ob vim p ad corpus eleuandum requiſitam vis rotatoria diminuitur, tamen corpus motum rotatorium recipiet, dummodo ſit $F.GC - P.AC > 0$. ex quo, non obſtante motus rotatorii difficultate ob lineae AG obliquitatem, tamen idem criterium, quod ſupra inuenimus, nempe ſi $F.GC > P.AC$ locum retinet ex quo intelligi queat, vtrum motus rotatorius ſubſequatur an ſecus. Durante autem motu rotatorio punctum A verſus O ſuper plano OV incedet, celeritate, quae ſe habeat ad ſuam celeritatem gyratoriam, vti $A\beta$ ad $A\alpha$ hoc eſt vti GC ad AC; hic autem tantum primum generationis momentum, quo motus rotatorius producitur

con-

conſideramus, ita vt ſit motus rotatorius infinite paruus reſpectu motus progreſſiui: ex quo punctum A planum eadem celeritate radet, ac ſi nullus adhuc adeſſet motus rotatorius.

§. 28. Ex his tamen intelligitur, motum corporum ex progreſſiuo et rotatorio mixtum admodum fore irregularem, ideoque determinatu difficilem. Motus enim rotatorius primum conceptus tam diu tantum durabit, quoad alia corporis facies ſeſe plano OV applicet, id quodcum percuſſione fiet, hocque caſu motus continuatio etiam ex percuſſionis regulis definiri debet. Hoc igitur cum euenerit motus rotatorius, ſi quidem ſubſiſtet, ſubito immutabitur, dum corpus alio angulo in planum innititur, neque ad hunc nouum motum rotatorium determinandum ſufficiet vti in primo ad criterium ante datum ſolum reſpexiſſe, ſed etiam ad motum rotatorium ante iam conceptum attendi oportet, quatenus per eum corpus incitatur ad nouum motum rotatorium recipiendum. Haecque cautela toties eſt repetenda, quoties alia baſis plano applicatur, vbi ſemper quaſi per ſaltum in motu mutatio ſubitanea producitur. Tametſi autem motus rotatorius ſine reſpectu ad progreſſiuum habito calculo ſubiici poteſt, tamen perpetuo ſimul ad motum progreſſiuum reſpici oportet, vt pateat quamdiu baſis, qua corpus plano innititur in directione AV progrediatur et quanta celeritate planum radat, ſi enim iſta baſis quieſcat, tum frictio omnino ceſſat, ſi autem antecedentia verſus incedat, tum ſubito frictio fit negatiua, motumque progreſſiuum accelerabit.

§. 29. Ob haec igitur obſtacula eiusmodi tantum corpora examini ſubiiciemus, quorum motus ſuper plano OV

O V ſine ſaltibus ſecundum vnam certam continuitatis legem abſolui queat, ac de reliquis corporibus ſufficiat annotaſſe, vti eſt factum, quibus caſibus motus progreſſiuus ſine prouolutione fieri poſſit. Inter huiusmodi autem corpora primum omnium deprehenditur globus, cuius centrum grauitatis in ipſo globi centro verſatur, globus enim talis motu continuo ſine ſaltu ſuper plano O V rotando progredi poteſt. Deinde etiam ad hanc claſſem pertinent cylindri, qui centrum grauitatis in medio axis ſui puncto ſitum habeant, ſi ſecundum directionem ad axem normalem moueantur. Praeterea huc referri poſſunt omnia corpora rotunda, quae vtrinque circa ſectionem per centrum grauitatis factam et ad axem normalem ex partibus aequalibus et ſimilibus conſtent, cuiusmodi corpora formantur ex conuerſione figurae planae diametro orthogonali praeditae circa ordinatam diametro normamalem. Eiusmodi enim corpus rotundum ſuper plano O V poſitum, et motum in directione horizontali ad ſuum axem normali tam progrediendo quam rotando ſine ſubitaneo ſaltu moueri poterit. Id tantum eſt tenendum vt axis corporis ad quem omnes ſectiones normaliter factae ſunt circuli ſimul per omnium ſectionum centra gtauitatis tranſeat, quo proprietate axis permanentis ſit praeditus.

§. 30. Incumbat igitur eiusmodi corpus rotundum plano O V ita vt eius axis ſit horizontalis, atque repraeſentet circulus D H C eius ſectionem mediam, in cuius Fig. 4. centro G poſitum erit totius corporis centrum grauitatis, eius axis autem erit recta horizontalis per G tranſiens atque ad planum ſectionis DHC normalis. Tanget igitur hoc corpus planum ſubiectum OV vel in vnico pun-

cto C ſi reliquae eius ſectiones omnes axi normales mi nores fuerint ſectione DHC, vel in pluribus punctis, ſi plures ſectiones maximae fuerint aequales vel contactus erit linea recta, ſi corpus fuerit cylindrus. Perpetuo autem perpendiculum GC quod in planum OV demittitur ſimul in rectam per omnia contactus puncta tranſeuntem erit normalis, haecque recta plano DHC ſimul normaliter inſiſtet. Sit iam totius corporis pondus = P, eiusque frictio, dum motu progreſſiuo in directione horizontali GF ad axem corporis normali mouetur = F. Atque ob rationes ſupra allegatas habebit F ad P conſtantem rationem pro omnibus corporibus ex materia aeque laeui confectis, ſi quidem eadem maneat plani OV aſperitas.

§. 31. Cum igitur in his corporibus baſis, qua plano inſiſtunt ſecundum directionem motus OV non ſit extenſa, interuallum CA omnino euaneſcit, eritque momentum virium ſollicitantium ad motum rotatorium generandum = F.GC: quod cum ſemper affirmatiuum habeat valorem, dummodo frictio F non prorſus ſit nulla, apparet eiusmodi corpora motum progreſſiuum recipere non poſſe, quin ſimul in ipſis ſtatim motus rotatorius generetur. Quare ſi corpori impreſſus fuerit motus progreſſiuus in directione GF a frictione ſtatim generabitur motus rotatorius circa axem corporis in plagam DHC, qui ob vim rotatoriam perpetuo eandem, quamdiu ſcilicet frictio adeſt, continuo accelerabitur, donec vis rotatoria F.GC euaneſcat. Frictio autem tamdiu aliquem retinebit valorem, quamdiu corpus motu ſuo planum radet, hocque euenit, quamdiu puncti C celeritas rotatoria

ria circa axem minor eſt, quam celeritas motus progreſſiui. Quam primum autem inter hos duos motus aequalitas intercedit, tum frictio ſubito ceſſabit, motusque tam progreſſiuus, quam rotatorius manebit vniformis, niſi quatenus a reſiſtentia aëris ac villoſitate plani diminuitur.

§. 32. Datur ſcilicet ſuper plano aspero non obſtante frictione motus vniformis mixtus ex progreſſiuo et rotatorio, quo cum corpus perpetuo ſine vlla diminutione progredietur, ſi quidem nec reſiſtentia aeris nec plani villoſitas impedimentum afferat. Exiſtit autem iſte motus vniformis tum cum frictio F penitus ceſſat, id quod euenit, quam primum punctum C planum radere deſinit, prouenit enim frictio a motu baſis, qua corpus planum tangit, ſuper plano OV. Quodſi ergo ponamus celeritatem motus progreſſiui in directione GF $= \surd v$ ſeu debitam altitudini v, tum niſi motus rotatorius adeſſet ſingula corporis puncta, ideoque etiam punctum C eadem celeritate $\surd v$ in directione CV moueretur. Sin autem ponamus motum rotatorium ſolum adeſſe, quo punctum C circa axem moueatur celeritate $= \surd u$ in plagam DHC, tum punctum C dum planum tangit mouebitur in directione CO celeritate $= \surd u$. Quare ſi vterque motus tum progreſſiuus quam rotatorius ſimul inſit in corpore, tum puncti C celeritas in directione CV erit $= \surd v - \surd u$: ex quo ſi fiat $\surd u = \surd v$, motus puncti C ſuper plano penitus ceſſabit, ſimulque frictio euaneſcet. Corpus ergo, poſtquam hunc motum fuerit adeptum, perpetuo aequabiliter progredi perget.

§. 33. Quoniam autem ad motum rotatorium definiendum noſſe oportet momentum inertiae corporis reſpectu

ſpectu axis rotationis, pro quo hactenus ſcripſimus Pbb, conueniet pro corporibus ſaltem rotundis, qualia hic tractare ſtatuimus, iſtud momentum inertiae calculo inueſtigare. Fig. 5. Sit igitur figura ACB, quae circa axem AB rotata praebeat ſolidum rotundum, cuius motum ſumus exploraturi; atque ſit medietas figurae BGC perfecte aequalis ac ſimilis alteri medietati AGC. Ponamus autem ſolidum ex materia vniformi conſtare, quo calculus facilior euadat; cadet ergo vtique centrum grauitatis corporis geniti ſponte in G. Ducatur ad axem applicata quaecunque PM ipſique proxima pm; ac vocetur $GP = x$; $PM = y$ erit $Pp = dx$. Sumatur in elemento $PMmp$ particula Xx, quae poſito $PX = z$ erit $= dx\,dz$. Ab hac particula per rotationem generabitur annulus, cuius maſſa erit $= \pi z dz dx$ denotante $1 : \pi$ rationem radii ad peripheriam: et cum huius annuli ſingulae partes aequaliter ab axe diſtent, erit eius momentum inertiae $= \pi z^3 dz dx$, integretur vtraque formula, fiatque $z = y$; dabit $\frac{\pi yy dx}{2}$ maſſam elementi ſolidi ex elemento plano Pm orti, et $\frac{\pi y^4 dx}{4}$ eius momentum inertiae. Hinc cum pars CGB ſimilis ſit parti CGA erit volumen ſeu pondus corporis $P = \pi \int yy x$; et momentum inertiae $Pbb = \frac{\pi}{2} \int y^4 dx$; ex quo fit $bb = \frac{\int y^4 dx}{2 \int yy dx}$ poſito poſt integrationem $x = GA$.

§. 34. Ponamus primo corpus eſſe cylindrum ex materia homogenea confectum, erit vbique $y = CG = c$, hincque $bb = \frac{\int c^4 dx}{2 \int cc dx} = \frac{cc}{2}$; ita vt momentum inertiae Pbb futurum ſit $= P.\frac{cc}{2} = \frac{1}{2} P.CG^2$. Sit porro corpus noſtrum rotundum globus homogeneus cuius radius $CG = c$,

$= c$, fiet $yy = cc - xx$, et $\int yydx = ccx - \frac{1}{3}x^3$ et $\int y^4dx = c^4x - \frac{2}{3}ccx^3 + \frac{1}{5}x^5$. Ponatur $x = c$; fietque pro toto globo $\int yydx = \frac{2}{3}c^3$ et $\int y^4dx = \frac{8}{15}c^5$, ex quibus ſequitur $bb = \frac{2}{5}cc$, ideoque momentum inertiae $Pbb = \frac{2}{5}Pcc = \frac{2}{5}P\,CG^2$. Simili modo ſi corpus fuerit ſphaeroides ellipticum, ex conuerſione ſemiellipſis ACB circa axem AB genitum, ponatur ſemiaxis $AG = a$, et $CG = c$, erit $yy = cc - \frac{ccxx}{aa}$; et $y^4 = c^4 - \frac{2c^4xx}{aa} + \frac{c^4x^4}{a^4}$: vnde fit $\int yydx = ccx - \frac{ccx^3}{3aa}$, et $\int y^4dx = c^4x - \frac{2c^4x^3}{3aa} + \frac{c^4x^5}{5a^4}$. Ponatur $x = AG = a$, fiet $\int yydx = \frac{2}{3}acc$ et $\int y^4dx = \frac{8}{15}ac^4$, ex quo ſequitur $bb = \frac{2}{5}cc$, prorſus vti pro globo. Erit ergo pro omni ſphaeroide elliptico homogeneo, quantuscunque fuerit axis AB, perpetuo momentum inertiae reſpectu axis $AB = \frac{2}{5}Pcc = \frac{2}{5}P.CG^2$.

§. 35 Ponamus iam eiusmodi ſolido rotundo in ini- Fig. 6
tio dum eius centrum grauitatis puncto O imminebat, impreſſum eſſe motum progreſſiuum in directione ad axem normali cum celeritate debita altitudini a ſimul vero, vt caſum in latiſſimo ſenſu accipiamus, eidem corpori impreſſus ſit motus rotatorius in plagam DHC, quo ſingulae peripheriae DHC puncta M circa axem circumferantur celeritate debita altitudini b. Hoc duplici motu impreſſo corpus iam confecerit ſpatium $OC = x$, ſitque nunc celeritas progreſſiua, qua centrum grauitatis G in direcctione horizontali GF progreditur, debita altitudini v, celeritas vero, qua punctum M etiamnum circa axem rotatur, debita altitudini u: vtrumque ſcilicet motum ſeorſim conſideramus ac metimur, perinde ac ſi alter non

 adeſſet

adeſſet. Progrediatur iam puncto temporis corpus motu progreſſiuo per ſpatiolum $Gg = dx$, atque interea punctum M motu angulari feretur per arculum Mm, vt ſit $Gg : Mm = \sqrt{v} : \sqrt{u}$, vnde oritur $Mm = \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$. Puncti C vero celeritas in directione CV ex vtroque motu reſultans erit $= \sqrt{v} - \sqrt{u}$.

§. 36. Dum igitur corpus progreditur per ſpatiolum $Gg = dx$, punctum C ſuper plano OV feretur per ſpatiolum $Cc = \frac{(\sqrt{v} - \sqrt{u})dx}{\sqrt{v}}$ intereaque tantum ſpatium Cc motu ſuo radet. Quodſi autem motus rotatorius abeſſet, tum punctum C raderet eodem tempuſculo ſpatiolum dx hocque caſu foret frictio, quam corpus ſentiret $= F$, illa ipſa ſcilicet, quam experimenta monſtrant. Quoniam igitur frictio oritur ab aſperitate, quam corpus dato tempuſculo radendo ſuperare debet, manifeſtum eſt praeſente caſu, quo punctum C tantum per ſpatiolum $Cc = \frac{(\sqrt{v} - \sqrt{u})dx}{\sqrt{v}}$ planum ſubiectum OV radit, dum corpus ipſum per ſpatiolum dx progreditur, frictionem tanto minorem fore debere quam F, quanto ſpatiolum Cc minus eſt ſpatiolo dx erit ergo frictio, qua corpus retrahitur in directione CO non amplius F ſed tantum $= \frac{(\sqrt{v} - \sqrt{u})F}{\sqrt{v}}$. Ex quo perſpicuum eſt, quod iam ante innuimus, ſi motus rotatorius $\sqrt{u}$ aequalis ſit motui progreſſiuo $\sqrt{v}$, tum frictionem penitus ceſſare: atque ſi fuerit $\sqrt{u} > \sqrt{v}$, tum frictio etiam fiet negatiua, atque corpus in directione CV ſollicitabit: ita vt haec expreſſio perpetuo effectum frictionis exhibeat, dummodo corpus non quiescat, quippe quo caſu frictio ſemper eſt nulla.

§. 37.

§. 37. Cum igitur corpus a frictione in directione CO retrahatur vi $= \frac{(\surd v - \surd u) F}{\surd v}$, ab hac vi motus progreſſiuus retardabitur vnde fiet $dv = \frac{-(\surd v - \surd u) F dx}{P \surd v}$ Quod vero ad motum rotatorium attinet, is a frictione accelerabitur, eritque eius vis acceleratrix $= \frac{(\surd v - \surd u) Fcc}{Pbb \surd v}$ denotante Pbb momentum inertiae corporis reſpectu axis, et poſito $GC = c$. Reactio autem plani hoc caſu ad motum rotatorium alterandum nihil confert, cum eius directio CG per ipſum centrum grauitatis G tranſeat. Quare dum punctum M per elementum $Mm = \frac{dx \surd u}{\surd v}$ rotatur, eius motus rotatorius accelerabitur, fietque $du = \frac{(\surd v - \surd u) Fccdx \surd u}{Pbbv}$. Ex quibus duabus aequationibus corporis motus tum progreſſiuus quam rotatorius in quovis ſpatii OV loco poterit determinari. Primum autem perſpicitur, ſi ſemel fuerit $\surd u = \surd v$, tum vtrumque corporis motum perpetuo invariatum permanere; quare ſi initio fuerit $\surd b = \surd a$, tum corpus motu impreſſo ſine vlla variatione in infinitum progredietur, neque in motu ſuo vllum decrementum patietur, niſi quatenus a reſiſtentia aeris ac villoſitate plani retardatur; a quibus impedimentis adhuc mentem abſtrahimus.

§. 38. Vt iam ex duabus inuentis aequationibus quicquam concludamus, ante omnia vnam ex tribus variabilibus v, u et x eliminari oportet, facillime autem elementum dx eliminatur. Fit autem ex prima aequatione $\frac{(\surd v - \surd u) F dx}{P \surd v} = -dv$, ex altera autem $\frac{(\surd v - \surd u) F dx}{P \surd v} = \frac{bbdu \surd v}{cc \surd u}$; vnde colligimus $\frac{dv}{\surd v} + \frac{bbdu}{cc \surd u} = 0$, quae aequatio integrata dat $cc \surd v + bb \surd u = cc \surd a + bb \surd b$ conſtante ad initium motus accomodata. Hinc erit $\surd u =$

cc

$\frac{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}-cc\sqrt{v}}{bb}$ et $\frac{\sqrt{u}-\sqrt{v}}{\sqrt{v}} = \frac{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}-cc\sqrt{v}-bb\sqrt{v}}{bb\sqrt{v}}$

Cum autem ex prima aequatione ſit $\frac{Fdx}{P} = \frac{dv\sqrt{v}}{\sqrt{u}-\sqrt{v}}$ fiet $\frac{Fdx}{P} = \frac{bb\,dv\sqrt{v}}{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}-cc\sqrt{v}-bb\sqrt{v}}$. Ponatur $\sqrt{v}=t$, et $cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}=m$ atque $cc+bb=n$, fiet $\frac{Fdx}{P} = \frac{2bb\,tt\,dt}{m-nt} = \frac{-2bb\,t\,dt}{n} - \frac{2m\,bb\,dt}{nn} + \frac{2mm\,bb\,dt}{nn(m-nt)}$, cuius integrale eſt $\frac{Fx}{P} = C - \frac{bb\,tt}{n} - \frac{2m\,bb\,t}{nn} - \frac{2mm\,bb}{n^3}\,l(m-nt)$ reſtitutis ergo valoribus pro m, n, et t, et conſtante C ad caſum accommodata erit $\frac{Fx}{P} = \frac{3ccbba+b^4a+2b^4\sqrt{ab}}{(cc+bb)^2}$ $-\frac{bbv}{cc+bb} - \frac{2(cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b})bb\sqrt{v}}{(cc+bb)^2} - \frac{2(cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b})^2bb}{(cc+bb)^3}\,l\,\frac{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}-cc\sqrt{v}-bb\sqrt{v}}{bb\sqrt{b}-bb\sqrt{a}}$

§. 39. Primum autem omnium intelligitur, ſi in loco quocunque cognitus fuerit corporis motus progreſſivus ſeu celeritas $\sqrt{v}$, tum expedite aſſignari poſſe motum rotatorium ſeu celeritatem $\sqrt{u}$ atque viciſſim ſimili modo ex cognito motu rotatorio indicabitur motus progreſſiuus Ex aequatione enim $cc\sqrt{v}+bb\sqrt{u}=cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}$, ſi cognita fuerit celeritas progreſſiua $\sqrt{v}$, tum erit celeritas rotatoria $\sqrt{u}=\frac{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}-cc\sqrt{v}}{bb}$, et ſi cognita fuerit celeritas rotatoria $\sqrt{u}$, erit celeritas progreſſiua $\sqrt{v}=\frac{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}-bb\sqrt{u}}{cc}$. Quodſi ergo eueniat, vt motus progreſſiuus ceſſet, tum erit celeritas rotatoria $\sqrt{u}=\frac{cc\sqrt{b}+bb\sqrt{b}}{bb}$; et ſi celeritas rotatoria alicubi euaneſcat, tum motus progreſſiuus ſupererit celeritate $\sqrt{v}=\frac{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}}{cc}$. Generatim autem perſpicitur frictione non obſtante, ſemper in motu corporis quantitatem quandam eiusdem magnitudinis conſtanter conſervari, quae eſt $cc\sqrt{v}+bb\sqrt{u}$; ex quo intelligitur corpus nunquam ad quietem a frictione redigi poſſe, niſi ſit $cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}=0$.

§. 40.

§. 40. Quo autem facilius ſingula phaenomena, quae aequationes inuentae in ſe complectuntur, euoluamus, caſus particulares perpendamus. Ponamus igitur corpori initio in O motum tantum progreſſiuum celeritate $\sqrt{a}$ eſſe impreſſum, ita vt ſit $\sqrt{b} = 0$, fiet ergo vbique $cc\sqrt{v} + bb\sqrt{u} = cc\sqrt{a}$; quae eſt vna aequatio; altera vero erit $\frac{Fx}{P} = \frac{(2cc + bb)bba}{(cc + bb)^2} - \frac{bbv}{cc + bb} - \frac{2ccbb\sqrt{av}}{(cc + bb)^2} - \frac{2c^4 bba}{(cc + bb)^3} \, l \frac{(cc + bb)\sqrt{v} - cc\sqrt{a}}{bb\sqrt{a}}$. Quoniam igitur logarithmi quantitatum negatiuarum ſunt imaginarii, apparet ſemper fore $\sqrt{v} > \frac{cc\sqrt{a}}{cc + bb}$, neque ante, quam corpus emenſum ſit ſpatium infinitum fiet $\sqrt{v} = \frac{cc\sqrt{a}}{cc + bb}$; tum vero fiet $\sqrt{u} = \sqrt{v}$, corpusque motu aequabili feretur. Celeritas ergo progreſſiua $\sqrt{a}$ corporis continuo diminuitur, donec tandem ſpatio percurſo infinito ſui partem $\frac{bb\sqrt{a}}{cc + bb}$ amittat. Cylindrus igitur, in quo eſt $bb = \frac{1}{2}cc$, ſpatio abſoluto infinito, retinebit celeritatem $= \frac{2}{3}\sqrt{a}$. Globus vero vel ſphaeroides ellipticum in quo eſt $bb = \frac{2}{5}cc$, de motu ſuo progreſſiuo primum impreſſo $\sqrt{a}$ continuo amittet, donec poſt tempus infinitum retineat motum progreſſiuum celeritate $= \frac{5}{7}\sqrt{a}$, ſimulque tantum motum rotatorium adipiscatur.

§. 41. Ponamus iam corpori initio in O nullum motum progreſſivum ſed tantummodo motum rotatorium in plagam DHC cum celeritate $\sqrt{b}$ eſſe impreſſum, ita vt ſit $\sqrt{a} = 0$. Generabitur igitur mox motus progreſſivus, ac ſemper inter motum progreſſiuum et rotatorium haec intercedet ratio vt ſit $cc\sqrt{v} + bb\sqrt{u} = bb\sqrt{b}$. Praeterea vero erit $\frac{Fx}{P} = \frac{bbv}{cc + bb} - \frac{2b^4\sqrt{bv}}{(cc + bb)^2} - \frac{2b^6 b}{(cc + bb)^3} \, l \frac{bb\sqrt{b} - (cc + bb)\sqrt{v}}{bb\sqrt{b}}$ ex qua aequatione apparet, ſi ſpatium x ponatur infininitum, eſſe oportere $\sqrt{v} = \frac{bb\sqrt{b}}{cc + bb}$, quo caſu quoque fit

$\sqrt{u} = \frac{bb\sqrt{b}}{cc+bb}$. Motus ergo progreſſiuus continuo creſcit rotatorius vero decreſcit, donec ſpatio emenſo infinito inter ſe fiant aequales. Ad ſenſum autem iſta aequalitas mox obtinetur, ſi enim ponamus $\sqrt{v} = \frac{99bb\sqrt{b}}{100(cc+bb)}$ fiet $\frac{Fx}{F} = 6,1501 . \frac{b^6 b}{(cc+bb)^3}$: et ſi $bb = \frac{2}{5}cc$ vti in globo erit $\frac{Fx}{P} = 0,1434 b$. Statim igitur ab initio motus tum prope ad vniformitatem redigitur, vt ne centeſſima quidem parte a perfecta vniformitate diſcrepet. Si enim $\frac{F}{P}$ ſit $= \frac{1}{4}$, quae eſt frictio iam ſatis parua, tum antequam corpus ſpatium $x = b$ abſoluit, celeritatem habebit ne centeſima quidem parte a celeritate vniformi et vltima diſcrepantem.

§. 42. Si igitur corpori initio in O duplex motus nempe progreſſiuus celeritate $\sqrt{a}$ ac rotatorius celeritate $\sqrt{b}$ imprimatur, facile indicare poterimus, quomodo corpus in infinitum ſit proceſſurum, ſcilicet ſi fuerit $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, tum corpus motu vtroque vniformiter in infinitum progredietur. Sin autem ſit $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, tum corporis motus progreſſiuus diminuetur, rotatorius vero augetur, donec emenſo ſpatio infinito ambo inter ſe fiant aequales, eritque tum $\sqrt{v} = \sqrt{u} = \frac{cc\sqrt{a} + bb\sqrt{b}}{cc+bb}$. At ſi fuerit $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ tum celeritas motus progreſſiui creſcet, rotatorius motus vero diminuetur, donec percurſo ſpatio infinito vtriusque celeritas ſit $= \frac{cc\sqrt{a} + bb\sqrt{b}}{cc+bb}$. Ad hanc vero motus aequabilitatem corpus ſatis cito ita perueniet, vt ſenſibus deſcrimen percipere non valeamus. Cum enim ſpatium x fiat infinitum, ſi quantitas logarithmica $\frac{cc\sqrt{a} + bb\sqrt{b} - cc\sqrt{v} - bb\sqrt{v}}{bb\sqrt{b} - bb\sqrt{a}}$ euaneſcat, quia $l\,0 = -\infty$, ita cum

cum logarithmus minimae fractionis ſit ſatis exiguus, intelligitur modicum ſpatium requiri, ad hoc, vt diſcrimen a motu perfecte vniformi prorſus ſit inſenſibile.

§. 43. Ponamus autem nunc corpori initio in O praeter motum progreſſiuum celeritate $\sqrt{a}$ imprimi motum rotatorium cum celeritate $\sqrt{b}$ in plagam oppoſitam HDC; atque in computo praecedente loco $+\sqrt{b}$ ſcribere debebimus $-\sqrt{b}$. Ac ſi in C ponamus motum rotatorium adhuc in eandem plagam HDC fieri, quoque $\sqrt{u}$ negatiue capiendum eſt. Pro hoc igitur caſu habetur prima aequatio haec: $cc\sqrt{v}-bb\sqrt{u} = cc\sqrt{a}-bb\sqrt{b}$: altera vero erit $\frac{Fx}{P} = \frac{3ccbba+b^4a-2b^4\sqrt{ab}}{(cc+bb)^2} - \frac{bbv}{cc+bb} - \frac{2(cc\sqrt{a}-bb\sqrt{b})bb\sqrt{v}}{(cc+bb)^2} - \frac{2(cc\sqrt{a}-bb\sqrt{b})^2bb}{(cc+bb)^3} l\frac{bb\sqrt{b}-cc\sqrt{a}+(cc+bb)\sqrt{v}}{bb\sqrt{a}+bb\sqrt{b}}$. Ex hoc apparet ſtatum vniformitatis, ad quem motus corporis ſe tandem componet fore $\sqrt{v} = \frac{cc\sqrt{a}-bb\sqrt{b}}{cc+bb}$ et $\sqrt{u} = -\frac{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}}{cc+bb}$ nempe $\sqrt{v} = -\sqrt{u}$, vti ſtatus vniformitatis, quo frictio euaneſcit, requirit. Antequam igitur corpus ad iſtum ſtatum vniformitatis peruenire poteſt, alterutram celeritatem negatiuum fieri oportet, ideoque per ſtatum quietis tranſire.

§. 44. Ad caſus hos euoluendos, quibus alterutra celeritas euaneſcit, ponamus primo $cc\sqrt{a} > bb\sqrt{b}$; manebit igitur celeritas progreſſiua $\sqrt{v}$ perpetuo affirmatiua, attamen continuo diminuetur, donec poſt percurſum ſpatium infinitum fiat $\sqrt{v} = \frac{cc\sqrt{a}-bb\sqrt{b}}{cc+bb}$, tum vero erit $\sqrt{u} = -\frac{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}}{cc+bb}$; ideoque rotatorius fit in ſenſum contrarium ei, quo initio rotabatur. Alicubi igitur neceſſe eſt vt motus rotatorius euaneſcat, vbi ſcilicet rotatio in plagam contrariam incipit. Ad hunc locum inueniendum ponamus $\sqrt{u} = 0$, eritque $\sqrt{v} = \frac{cc\sqrt{a}-bb\sqrt{b}}{cc}$, qui valor in

altera aequatione ſubſtitutus dabit $\frac{Fx}{P} = \frac{2b^4(3cc+bb)\sqrt{ab}}{cc(cc+bb)^2} - \frac{b^6(3cc+bb)b}{c^4(cc+bb)^2} - \frac{2(cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b})^2 bb}{(cc+bb)^3}\, l\, \frac{cc\sqrt{a}-bb\sqrt{b}}{cc\sqrt{a}+cc\sqrt{b}}$: valor ergo ipſius x ex hac aequatione ortus oſtendet locum vbi motus rotatorius corpori initio impreſſus prorſus deſinit, atque vbi motus rotatorius in plagam oppoſitam generari incipit, tum igitur corpus in infinitum progredietur, tandemque motum vniformem recipiet. At ex praecedentibus intelligitur non multo poſt, quum $\sqrt{u}$ erat $= 0$, motum ad ſenſum fore vniformem.

§. 45. Caſus maxime notatu dignus eſt, quo $bb\sqrt{b} > cc\sqrt{a}$, tum enim, antequam corpus ad ſtatum aequabilitatis peruenire poteſt, eius motus progreſſiuus euaneſcere, et in negatiuum transmutari debet. Progreditur ſcilicet corpus in directione OC ad certum vsque terminum V, ex quo ſubito reuertetur in viam VO, atque in hac directione VOv in infinitum abibit; conſequeturque celeritatem negatiuam $\sqrt{v} = \frac{cc\sqrt{a}-bb\sqrt{b}}{cc+bb}$, celeritas autem rotatoria ſpatio percurſo infinito erit $\sqrt{u} = \frac{bb\sqrt{b}-cc\sqrt{a}}{cc+bb}$. Ad terminum ergo V determinandum, quousque corpus pertingit, antequam reuertitur, ponere debemus $\sqrt{v} = 0$, fietque in eo loco celeritas rotatoria $\sqrt{u} = \frac{bb\sqrt{b}-cc\sqrt{a}}{bb}$, atque $\frac{Fx}{P} = \frac{(3cc+bb)bba - 2b^4\sqrt{ab}}{(cc+bb)^2} - \frac{2(cc\sqrt{a}-bb\sqrt{b})^2 bb}{(cc+bb)^3}\, l\, \frac{bb\sqrt{b}-cc\sqrt{a}}{bb\sqrt{a}+bb\sqrt{b}}$. Si fiat $bb\sqrt{b} = cc\sqrt{a}$, qui caſus conſtituit terminum huius phaenomeni paradoxi, quo corpus ſuper plano libero ad certum vsque locum progreditur, indeque ſubito regreditur: corpus vsque ad V, exiſtente OV $= \frac{Pbba}{l(cc+bb)}$ progreditur, antequam celeritatem ſuam omnino perdit, tum vero ſimul motum rotatorium amittet, atque in quiete perſiſtet, qui eſt caſus ſingularis.

§. 46.

§. 46. Sit igitur $bb\sqrt{b} > cc\sqrt{a}$, ac ponatur $\frac{bb\sqrt{b} - cc\sqrt{a}}{bb\sqrt{a} + bb\sqrt{b}} = \frac{1}{n}$, erit $\sqrt{b} = \frac{(ncc+bb)\sqrt{a}}{(n-1)bb}$ hincque $\frac{Fx}{P} = \frac{(n-3)bba}{(n-1)(cc+bb)} - \frac{2bba}{(n-1)^2(cc+bb)}\, l\frac{1}{n}$ ſeu $x = OV = \frac{(n-3)Pbba}{(n-1)(cc+bb)F} + \frac{2Pbba}{(n-1)^2(cc+bb)F}\, ln$. Sicque punctum V innoteſcit, quovsque corpus motu ſuo pertingit, antequam reuertitur. Praecipui igitur caſus ita ſe habebunt, ex quibus reliquos concludere licet

$$n = 2;\ \sqrt{b} = \frac{(2cc+bb)\sqrt{a}}{bb};\ OV = \frac{Pbba}{F(cc+bb)} \cdot 0,38629436$$
$$n = 3;\ \sqrt{b} = \frac{(3cc+bb)\sqrt{a}}{2bb};\ OV = \frac{Pbba}{F(cc+bb)} \cdot 0,54930614$$
$$n = 4;\ \sqrt{b} = \frac{(4cc+bb)\sqrt{a}}{3bb};\ OV = \frac{Pbba}{F(cc+bb)}\ 0,64139874$$
$$n = 5;\ \sqrt{b} = \frac{(5cc+bb)\sqrt{a}}{4bb};\ OV = \frac{Pbba}{F(cc+bb)} \cdot 0,70117974$$
$$n = 6;\ \sqrt{b} = \frac{(6cc+bb)\sqrt{a}}{5bb};\ OV = \frac{Pbba}{F(cc+bb)} \cdot 0,74334075$$
$$n = 7;\ \sqrt{b} = \frac{(7cc+bb)\sqrt{a}}{6bb};\ OV = \frac{Pbba}{F(cc-bb)}\ 0,77477278$$
$$n = 8;\ \sqrt{b} = \frac{(8cc+bb)\sqrt{a}}{7bb};\ OV = \frac{Pbba}{F(cc+bb)} \cdot 0,79916087$$
$$n = 9;\ \sqrt{b} = \frac{(9cc+bb)\sqrt{a}}{8bb};\ OV = \frac{Pbba}{F(cc+bb)} \cdot 0,81866327$$
$$n = 10;\ \sqrt{b} = \frac{(10cc+bb)\sqrt{a}}{9bb};\ OV = \frac{Pbba}{F(cc+bb)} \cdot 0,83463172$$

§. 47. Phaenomenon hoc, quo corpus ſuper plano horizontali propulſum ad certam tantum diſtantiam progreditur indeque ſubito quaſi reflexum reuertitur, experimentis quoque demonſtrari poteſt, dum corpori rotundo duplex motus progreſſiuus ac rotatorius hac lege imprimitur, vt motus rotatorius ſit contrarius motui progreſſiuo ac celeritas rotatorii motus $\sqrt{b}$ maior ſit quam $\frac{cc}{bb}\sqrt{a}$. Si nimirum globus ad huiusmodi experimenta adhibetur, ipſique in O imprimatur tum motus progreſſiuus in directione OV celeritate $= \sqrt{a}$, ſimul vero ipſi inducatur motus rotatorius in plagam $\delta O \Phi$ celeritate $= \sqrt{b}$, tum

ob $\frac{cc}{bb} = \frac{5}{2}$ ſi fuerit $\sqrt{b} > \frac{5}{2}\sqrt{a}$, globus motu progreſſiuo ad certam tantum diſtantiam OV pertinget, hincque revertetur, et in directione Vv in infinitum progredietur, celeritatem tandem acquirens pro vtroque motu eandem atque $= \frac{2\sqrt{b} - 5\sqrt{a}}{7}$. Quodſi autem ponamus $\sqrt{b} = \frac{(5n+2)\sqrt{a}}{2(n-1)}$, erit interuallum OV, ad quod corpus pertingit, antequam reflectitur $= \frac{2Pa}{7F}\left(\frac{n-3}{n-1} + \frac{2ln}{(n-1)^2}\right)$, vbi pro ln logarithmum hyperbolicum numeri n accipi oportet.

§. 48. Quo facilius hae concluſiones cum experimentis comparari queant, diuerſos caſus numeri n, quos ante euoluimus, ſingulatim perpendamus, vbi notandum eſt fore proxime $\frac{2P}{7F} = 1$: quia vulgo $\frac{F}{P}$ ſolet eſſe fractio inter $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ contenta. Si porro k denotet ſpatium, quod globus motu impreſſo tempore vnius minuti ſecundi abſoluere queat, in partibus milleſimis pedis Renani expreſſum, erit $a = \frac{55}{62563}$. Sicque ſpatium OV quouis caſu in data menſura exprimi poterit. Si ergo fuerit

$$\sqrt{b} = \tfrac{12}{2}\sqrt{a};\ \text{erit}\ OV = \tfrac{2Pa}{7F}.\ 0,38629436$$
$$\sqrt{b} = \tfrac{17}{4}\sqrt{a};\ \text{erit}\ OV = \tfrac{2Pa}{7F}.\ 0,54930614$$
$$\sqrt{b} = \tfrac{22}{6}\sqrt{a};\ \text{erit}\ OV = \tfrac{2Pa}{7F}.\ 0,64139874$$
$$\sqrt{b} = \tfrac{27}{8}\sqrt{a};\ \text{erit}\ OV = \tfrac{2Pa}{7F}.\ 0,70117974$$
$$\sqrt{b} = \tfrac{32}{15}\sqrt{a};\ \text{erit}\ OV = \tfrac{2Pa}{7F}.\ 0,74334075$$

etc.

Atque ſi numerus n fiat infinitus vt fiat

$\sqrt{b} = \frac{5}{2}\sqrt{a}$ erit $OV = \frac{2Pa}{7F}$ quod eſt interuallum maximum ad quod globus pertingere valet, antequam reuertatur.

DE

DE METHODIS HOROLOGIA SOLARIA PROMTE DELINEANDI.

Auctore
Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

Cum non acuendis ſolum ingeniis, ſed vtilitati etiam et commoditati in vita humana, inſeruire et fauere debeat Matheſis: nullum dubium eſt, quin egregias laudes promereantur illi Artifices, qui, alteri horum ſcoporum praecipue intenti, ſolerter excogitant et fabricant eiusmodi Inſtrumenta, quibus contemplationes Mathematicorum fructuoſas reddere, ſimulque ad vſus communes et quotidianos vocare, facile licet. Eminent inter haec varia linearum, partibus vſui quaeque ſuo, diſtinctarum genera, quae in Regulis metallicis expreſſae Problemata totius Matheſeos maxime obuia, atque adeo etiam *Artis Gnomonicae*, promte et commode reſoluta ita porrigunt quaſi, vt ab imperitis etiam recipi et ad conuenientes vſus trahi tuto poſſint.

§. 2. In hunc finem *Angli* Inſtrumentorum Mathematicorum fabricatores, ingenio pariter et induſtria mirum pollentes, inſculpere Regulis ſolent lineas quoque Gnomonicas, quae certe Horologiis ſolaribus conuenienne et promte deſcribendis ſunt aptiſſimae; cum alias hic requiratur labor, vti notum eſt, non mediocris, et qui patientiam multum exercent. Harum linearum praecipuae ſunt

ſunt duae, Horologiis horizontalibus deſignandis deſtinatae, quarum vnam vocare ſolent: *Scalam ſex horarum*, *ſcale of ſix hours*; alteram vero *Lineam Latitudinum*, *Line of Latitudes*; cuius vtriusque adminiculo coniuncto ad cuiusvis loci terreſtris Latitudinem quam citiſſime exarari poteſt horologium horizontale exactiſſimum. Adiiciunt his quandoque adhuc alias, inſeruientes horologiorum declinantium conſtructioni, quas autem intactas nunc relinquam; ſed id ſolum agam, vt vſum indicaturam ſcalarum, minus certe pro eius praeſtantia extra Angliam familiarem, diſtincte et breuiter exponam, hancque praxin Demonſtratione Geometrica muniam, quam et hucusque in variis libris, fruſtra quaeſiui, ſed et indagatione diligentiore dignam omnino iudicaui.

§. 3. Operatio igitur, per lineas praemonſtratas breuiter et facillime abſoluenda, legitur in *Clariſſ. Harriſii Lexico Technico*, ſub titulo: *Dialling-Lines*; neque alibi, etiamſi diu et ſedulo inquirens, eam deſcriptam deprehendere potui. In Dictionario enim Anglico ſimili ſed auctiore, *Nobiliſſ. Chambers*, Definitiones ſolae harum linearum, ſine praxeos mentione facta, occurunt; vnde etiam factum eſt, vt aliquamdiu dubius in his lineis ad vſum Gnomonicum reuocandis haeſerim. Poſt haec vero mihi in manus adhuc incidit optato liber Anglicus, cui titulus eſt: *The Deſcription and Vſes of a great Vniverſal-Quadrant*, *auctore Ioh. Collins*, editus Londini 1658, in quo hanc ipſam methodum ex inſtituto deſcriptam vidi, attributam *Iohanni Ferrereo* Hiſpano, et excultam quoque *Clauio* in operibus eius mathematicis, editis anno 1612; ſed Demonſtratione deſtitutam.

tam. Abſoluta autem iam hac Diſſertatione, inueni Demonſtrationem elegantem ſane huius methodi, ſed diuerſam tamen a mea, inter *Schootenii* Exercitationes Mathematicas, libro V. ſect. 29. p. 510. vbi excogitatio huius methodi deſcribendi horologia ſciatherica per triangulum iſoſceles, attribuitur *Samueli Forſtero*, apud *Londinenſes* in Collegio *Greſhamenſi* Aſtronomiae Profeſſori, qui *Londini* tractatum hac de re edidit anno 1638, cui titulus eſt: *The Art of Dialling by à new eaſie and moſt ſpeedii way*. Conſtat autem ea ſequentibus: Sit conſtruendum horologium horizontale ad locum cuius latitudo eſt 47°; in ducta igitur linea recta AB, ex puncto aliquo intermedio C abſcindatur vtrinque portio CA et CB, quarum vtraque aequalis ſit longitudini illi in *Linea Latitudinum* inſtrumenti, quae his gradibus latitudinis reſpondet. Tum capiatur Circino integra longitudo *Scalae ſex horarum*, eaque mediante ex A et B deſcribatur triangulum aequicrurum AEB, eritque ſic puncto E adſcribenda hora XII, et ducta CE linea meridiei. Iam vero inſtrumentum ob oculos ponit *Scalam* hanc *ſex horarum*, diuiſam in ſex horas, et quamlibet harum ſubdiuiſam adhuc in partes minores, prout exſtenſio huius lineae id permittere poteſt. Transferantur itaque longitudines, ab initio ſcalae ad quamlibet horam extenſae, ex E vtrinque in puncta 1, 1. 2, 2. 3, 3. 4, 4. 5, 5. quibus punctis ita obtentis ex centro horologii C per haec ducantur totidem lineae rectae C 1 I; C 2 II; C 3 IX; etc. quae erunt lineae horariae quaeſitae, figura noua, ornatus gratia, pro lubitu circumſcribendae. Si partes horarum deſiderentur; eae eadem facilitate ex ſcala depromuntur, et ab E vtrinque transferuntur.

Tab. V. Fig. 8.

§. 4. Quo maiori itaque facilitate haec operatio abſoluitur: eo maiori etiam ingenio eam erutam eſſe recte indicare mihi videor. Sed vt tota haec praxis luce perfundatur ſua, appareatque eam tutiſſimam eſſe et omnino exactam, ante omnia diuiſio *Scalae ſex horarum* indicari debet. Ea ſic adornatur. Intra Peripheriam circuli ducantur diametri XII VI, et AB, ad angulos rectos ſe decuſſantes, quo facto ſemiperipheria XII B VI diuidatur in partes aequales ſex pro horis, in duodecim pro ſemihoris, in viginti quatuor pro quadrantibus horae, et ſic porro; tum ex A ducantur in ſingula haec diuiſionum factarum puncta rectae AC, AD, etc. quae diametrum XII VI in totidem punctis interſecabunt; eritque ſic diameter XII VI *Scala ſex horarum* parata, cui horarum numeri adſcribuntur, vti figura docet. Vnde patet, cum, pro diuiſione horarum, BC ſit 30°, fore III II = III IV, tangentem anguli horarii 15°, relatam ad radium A III, pariterque eſſe III I = III V, nec non III XII = III VI, tangentes angulorum horariorum reſpectiuos ad 30° et 45°, pro eodem radio, quem hic, et in ſequentibus, conſtanter aſſumam aequalem vnitati. Erit igitur longitudo *Scalae ſex horarum* integra = 2, hoc eſt, aequalis duplo tangentis 45°; habebitque diuiſiones, facto initio ab hora III, hinc et inde reſpectiue ſibi aequales; quarum longitudines, ab eadem hora III captae, nihil erunt aliud niſi tangentes angulorum horariorum, vel ſemihorariorum, etc. vel tangentes angulorum 15°, 30°, 45°; aut 7° 30′, 15°. 0′, 22° 30′, 30° 0, 37° 0, 37°. 30′, 45° 0′, etc. Ex his itaque facile perſpicitur natura *Scalae ſex horarum*; quid vero ſit *Linea Latitudinum*, inferius demum poterit explicari.

Tab. VI. fig. 1.

§. 5.

§. 5. Ad reliquam tractationem neceſſe nunc eſt, vt paucis ad memoriam reuocetur ordinaria horologii horizontalis delineatio, fundata in regulis Proiectionum Aſtronomicarum, apud varios Auctores doctrinae Gnomonicae obuia, et quae breuiter huc redit. Ducta linea recta indefinita AEXII, capiatur angulus EAG = latitudini loci, ductaeque ſic rectae AG inſiſtat ad angulos rectos GD, cui aequalis abſcindatur DE. Radio ED deſcribatur quadrans circuli DK diuidendus in ſex partes aequales pro horis, ductisque per harum diuiſionum puncta inuenta rectis E1, E2, E3, etc., denotabuntur in D5, perpendiculari ad AE, puncta 1, 2, 3, 4, 5, per quae ductae rectae A1, A2, A3, A4, A5, erunt lineae horariae quaeſitae. Ponamus iam eadem puncta 1, 2, 3, 4, 5, determinari debere per applicationem *Scalae ſex horarum*, quae ſit BC; apparet, quaeſtionem iam in eo verſari, quomodo punctum B aut C determinari debeat, vt ei ſcala ſex horarum, conſtantis quippe longitudinis, tuto applicari poſſit; deinde etiam, an poſſibile ſit, et inſtitutum id patiatur, vt quibuslibet latitudinibus vna eademque inſeruiat longitudo et diuiſio rectae BC hoc modo applicatae.

§. 6. Quibus quaeſtionibus vt ſatisfaciam, inueſtigabo tantum quantitatem rectae AB, viſurus an ea dependeat a latitudine loci ſola, vel an aliis adhuc determinationibus obnoxia ſit. Quodſi enim illud ſe manifeſtet: patebit poſſibilitas *Salae ſex horarum* conſtantis, ad ſingulas latitudines applicandae. Quod vt commodius fiat, aſſumam tangentium D1, D2, D3, etc. eundem radium cum tangentibus FH, FI, FC, ſcilicet vtrumque

$= 1$, eritque adeo $DE = DG = FC = FB = 1$, et $CB = 2$.

§. 7. Iam vero conſiderari debet, tangentem FII, 15°, (§. 4.) ita eſſe comparatam, vt ducta per punctum II, recta A II 2, tangens D 2 ſit 30°. Porro tangens F I ita eſt comparata, vt ducta per punctum I recta A I 1. tangens D I ſit 15°; vnde, ſi ex centro A ducatur recta intermedia quaenis $A\alpha\beta$, generaliter tangentem $F\alpha$ ita conſtitutam eſſe oportet, vt, ſi angulus ipſi reſpondens fuerit Z, debeat eſſe $D\beta =$ tang. $(45° - Z)$. Quia vero initium numerandi hos angulos Z factum eſt a puncto F verſus C: euidens eſt angulos ab F captos verſus B fieri priorum ſuorum analogorum negatiuos, eorumque tangentes habendas etiam eſſe pro negatiuis; ita vt ex. gr. ſit $D5 =$ tang $(45° + 30°) =$ tang. 75°.

§. 8. Hac praeparatione iam facta, ſint, latitudinis ſinus $= m$, $AB = e$, tangens anguli $Z = F\alpha = t$, erit $C\alpha = 1 - t$, ACB ſinus $= \frac{e}{2}$, coſ. $= \frac{\sqrt{(4 - e^2)}}{2}$; et quia generaliter poſitis tangentibus anguli maioris $= T$, minoris $= t$, tangens differentiae eſt $\frac{T - t}{1 + Tt}$, et tang. $45° = 1$, erit tang $(45 - Z) = \frac{1 - t}{1 + t}$, eritque porro in triangulo rectangulo ADG haec analogia; ſin. DAG (m) : DG $(1) =$ ſinus totus (1) : AD vnde fit $AD = \frac{1}{m}$.

§. 9. Ex his deinde vlterius deducuntur ſequentia: ſi ex α demittatur $\alpha\gamma$ perpendicularis ad AC. Nempe in triangulo $C\gamma\alpha$ eſt, ſinus totus (1) : $C\alpha(1 - t) =$ ſin. ACB$(\frac{e}{2})$: $\gamma\alpha = \frac{1 - t.e}{2}$; nec non in eodem triangulo, ſinus totus (1) : $C\alpha(1 - t)$ coſ. ACB $(\frac{\sqrt{4 - ee}}{2})$: $C\gamma = \frac{1 - t.\sqrt{4 - ee}}{2}$, ex quibus conficitur tangens $DA\beta =$ tan. $\gamma A \alpha$

$\gamma A\alpha = \frac{\gamma\alpha}{A\gamma} = \frac{\gamma\alpha}{AC - C\gamma} = \frac{\overline{1-t}\,e}{2\sqrt{(4-ee)} - (1-t)\sqrt{(4-ee)}} = \frac{\overline{1-t}.e.}{1+t.\sqrt{(4-ee)}}$; vnde per analogiam ſequentem, radius (1): tang. DAβ ($\frac{\overline{1-t}.e}{1+t.\sqrt{(4-ee)}}$) $=$ AD($\frac{1}{m}$):Dβ, oritur Dβ $= \frac{\overline{1-t}.e}{1+t.m\sqrt{(4-ee)}}$. Vt igitur D β aequalis fiat tang. (45°—Z), prouti conditio operationis requirit, (§. 7.) nihil aliud neceſſe eſt, quam vt ſit $\frac{e}{m\sqrt{(4-ee)}} = 1$, hoc eſt, $e = \frac{2m}{\sqrt{(m^2+1)}}$; ſi enim hoc ita ſe habeat, erit Dβ $= \frac{1-t}{1+t}$, qualis (§. 8.) debet eſſe tangens (45°—Z). Vnde ergo conficitur, rectam AB nihil aliud inuoluere niſi ſinum latitudinis loci; adeoque eam conſtanti *Scalae ſex horarum* applicandae omnino eſſe aptam, ex quo ſimul totius praxeos ſupra allegatae (§. 3.) demonſtratio manifeſta eſt.

§. 10. Quoniam ex praecedentibus eſt AD$= \frac{1}{m}$, et AC$= \sqrt{(4-e^2)} = \frac{2}{\sqrt{(m^2+1)}}$, deriuatur exinde valor ipſius CD$= \pm(\frac{1}{m} - \frac{2}{\sqrt{m\,m\,m+1}})$, prouti punctum C vel intra vel extra D cadit, qui ſi debeat eſſe nullus, vt puncta C et D coincidant, requiritur vt ſit $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$, quod quamproxime in latitudine $35^{\circ}\,16'$ accidit.

§. 11. Sed maiorem curam meretur aequatio modo inuenta, $e = \frac{2m}{\sqrt{(m^2+1)}}$, ex cuius quippe conſtructione diuiſio *Lineae Latitudinum*, ſuperius (§. 4.) promiſſa, perficitur. Geometrice haec conſtructio abſolui poteſt ſequenti modo. Sit ſinus latitudinis datae $m = \alpha\beta$, per β ducatur recta $\theta\gamma$, parallela diametro AB, et fiat $\beta\gamma =$ Fig. 1. αB, tum ex γ educatur in centrum recta γIII, ſecans peripheriam in δ, factiſque, arcu Iδ=Bη, et

recta $\delta\eta$, erit haec $\delta\eta = e =$ A B in Fig. III. Nam facile patet, eſſe γ III $= \sqrt{(m^2 + 1)}$, atque hinc γ III $(\sqrt{mm+1}) : \gamma$ B$(m) = \delta$ III$(1) : \delta\eta \left(\frac{m}{\sqrt{(m^2+1)}}\right)$. Vnde ſi quis cupiat hac methodo horologium horizontale ad datam latitudinem conſtruere, id ſequenti modo exſequetur, deſcribendo nempe, radio pro lubitu aſſumto, ſed pro vnitate accepto, circulum B A, et formando in hoc, praeſcripto modo, (§. 4.) *Scalam ſex horarum*; qua legitime diuiſa, deinde ex data latitudine loci quaeratur etiam $\delta\eta$ per conſtructionem modo indicatam; eritque inuenta *Scala ſex horarum* in Fig. III. ipſa BC, applicanda, modo ſupra (§. 3.) indicato, ex B ita vt AB ſit eadem cum modo inuenta recta $\delta\eta$.

§. 12. Arithmetica igitur conſtructio *Lineae Latitudinum* ex praecedente Geometrica prono alueo fluet; nempe, datae latitudinis loci ſinus rectus euoluatur inter tangentes, et videatur cuinam arcui reſpondeat; atque huius arcus noui ſinus duplus erit numerus capiendus in radio B III diuiſo in partes 100000 aequales, pro puncto *Scalae* huius *Latitudinis* deſignando. Longe vero abludit haec regula ab ea, quam *Clar. Harriſius*, *et Nobiliſſ. Chambers* in Dictionariis ſupra laudatis vnanimiter allegant, his verbis; linea latitudinum producitur ſecundum hunc Canonem: „As Radius to the Chord of 90°, „ſo are the tangents of each reſpective Degrees of the „Line of latitudes to the tangents of other arks; and „then the natural ſines of thoſe arks are the numbers, „which taken froma Diagonal Scale of equal parts, ſhal „graduate the Diuiſions of the Line of Latitudes to any „radius.„ vid. haec Lexica ſub tit. Dialling Lines. Quantum

tum enim haec verba interpretari poſſim, eaque quantitatibus meis hucusque adhibitis accommodare, Analogia commendata pro conſtructione lineae latitudinem huc redit: $1 : \sqrt{2} = \frac{m}{\sqrt{1 - mm}}$: tangentem arcus cuiusdam, quem voco A. Itaque tangens $A = \frac{m\sqrt{2}}{\sqrt{1 - mm}}$. Sit nunc ſinus naturalis rectus huius arcus, qui tangentem modo memoratam habet, $= x$, eruetur x ex hac analogia, $\frac{m\sqrt{2}}{\sqrt{1 - mm}} : 1 = x : \sqrt{1 - xx}$ vnde oritur $x = \frac{m\sqrt{2}}{\sqrt{mm + 1}}$, quia valor ab eo, qui ſupra (§. 9.) inuentus eſt, $\frac{2m}{\sqrt{mm + 1}}$, diſcrepat; cuius quidem diſſenſus cauſam neſcire me fateor; id tamen experiundo cognoui, meam regulam ad amuſſim congruere omnibus illis exemplaribus inſtrumentorum, quae ex *Anglia* huc translata in *Gazophylacio Imperiali* aſſeruantur.

§. 13. Patet ex ſuperioribus (§. 5.) lineam D 5, *aequinoctialem* dictam, tenere conſtantem diuiſionem tangentium horariarum, conſequenter etiam haec pro *Scala ſex horarum* poterit aſſumi perpetua, dummodo conueniens ipſi, pro quolibet caſu latitudinis, centrum A aſſignetur. Sin igitur habeatur talis ſcala, regulae aeneae inſculpta, atque eius ope delineandum ſit horologium horizontale, ducantur duae lineae AD, et D 5, ad angulos rectos, atque in hanc ex ſcala transferantur diuiſiones conuenientes D 1, D 2, D 3, D 4, D 5, erit haec D 5 baſis horologii futuri. Cui vt conueniens centrum aſſignetur, erit, poſito ſinu toto $= 1$, et ſinu latitudinis loci $= m$, vniuerſaliter $DA = \frac{1}{m}$, (§. 8.) quae Geometrice ſic inuenitur; quoniam in ſcala horarum D 5 lon- Fig. 2.

gitudo

gitudo D3 aequalis eſt radio circuli ad quem tangentes huius ſcalae pertinent: deſcribatur hoc interuallo D3, Fig. 3. tanquam radio, ſemicirculus AFB; in hoc ſit arcus AD = latitudini loci, et DG eius ſinus = *m*, excitato ex C radio CF, normali ad AB, ducatur puncti F tangens FE, et radius CD eousque producatur, donec tangenti huic FE in E occurrat; determinabit recta CE, coſecans nempe arcus AD, in Fig. 3. ex D in A translata, centrum quaeſitum ſciatherici. Eſt enim manifeſtum, in triangulis ſimilibus GDC et FCE, eſſe DG (*m*): DC (1) = CF (1): CE = $\frac{1}{m}$. Cumque adeo haec CE per ſolam latitudinem loci determinetur, patet iterum, poſſe vnica *Scala Latitudinum* omne hoc negotium abſolui, quod ad definiendum centrum Sciatherici requiritur. Atque huc ſine dubio redit methodus illa Domini *Haye*, Architecti militaris Galli, quae anno 1716 innotuit per tractatum cui titulus: *Regle Horaire Univerſelle, pour tracer des Cadrans Solaires*, etc. deſcribitur enim haec praxis in *Diario Eruditorum Gallico* ad annum 1717 p. 547. ſic, vt conſtet duabus lineis, regulae metallicae inſculptis, quarum vna diuiſa ſit in puncta horaria a ſeptima hora matutina vſque ad quintam veſpertinam (quae ſcilicet lineae D5 Fig. III. dupla eſt) altera autem *Centralis* ipſi vocata, inſeruit definiendo centro horologii in loco latitudinis datae, quam Auctor extendit tantum a gradu latitudinis 21 vſque ad 65. Inueni poſtea etiam in libro *Germanico*, cuius titulus: Der unbetrügliche Stunden-Weiſer, anno 1702 edito a *Joh. Ulr. Muller*, p. 237 primum, qui de ſimili quadam, in hoc paragrapho in-

dicata,

dicata ſcala Gnomonica ſcripſerit, fuiſſe *Clauium* cui *Iacobus Curtius*, Romanorum Imperatoris ad ſummi Pontificis aulam Legatus, tale artificium communicauerit, ſuccedentibus deinde in cognitionem huius praxeos *Kirchero*, et *Schotto*, quorum poſterior hanc ipſam methodum aperte docet in *Curſu Mathematico*, Herbipoli an. 1661 edito: pag. 409, Horographiae Parte V. Prop. II. Ex quibus omnibus tandem etiam haud obſcure intelligitur, qua ratione conſtrui poſſit horologium horizontale vniuerſale, in quo nempe Index et loco moueri, et ſimul magis aut minus eleuari, debet.

DE
ORBITARVM APPARENTIIS.

Auctore

G. Heinſio.

1.

Tab. VII. Praecipuus Aſtronomiae finis eo tendit, vt non ſolum phaenomena coeleſtia legitime explicari, ſed etiam praedici queant. Apparentiae orbitarum, quas corpora coeleſtia deſcribunt, vel etiam circulorum, quos in globis planetarum ductos concipiunt Aſtronomi, non infimum locum inter ea occupant, quae praedictum finem eximium in modum promouent. Qui apparentias orbitarum ſatellitum Iouis vel Saturni ad datum quoduis tempus determinare valet, illi parum negotii faceſſet definitio phaenomenorum hiſce Satellitibus ſolennium. Cognita ad quoduis tempus Aequatoris Solis in eius diſco apparitione, theoria macularum Solarium maxima ex parte nota erit. Motus Lunae libratorii explicatio multum iuuabitur, ſi ad quoduis tempus apparentia aequatoris Lunae in eius diſco ſciatur, conceſſo nimirum huic planetae vertiginis motu. Taceo apparentiam motus vertiginis in reliquis planetis, apparentiam hemiſphaerii terrae e Luna viſi tempore Eclipſis Solaris, apparentiam annuli Saturni etc., quarum explicationem Aſtronomia non ſolum poſcit, ſed in promouendis etiam theoris ſucceſſu exoptato adhibet.

2.

2. Tantus eiusmodi apparentiarum per totam fere Aſtronomiam vſus exſtimulauit animum, iſtas euidentiori et ampliori modo, ac hactenus factum eſſe credo, quantum pro viribus licet, examinandi, ad calculum reuocandi et ad vſum Aſtronomicum accommodandi. Vt propoſitum hoc legitime exequamur, exponemus primum, quid per orbitas, earumque apparentias intelligere velimus; deinde apparentiam orbitae ad proiectionem circuli in planum poſitione datum reducere et huius theoriam pro ſcopo noſtro generalem tradere allaborabimus, quae, cum ſupponat orbitae reſpectu oculi poſitionem, anſam dabit inquirendi conditiones poſitionis orbitae reſpectu oculi eiusque variationes ex conditionibus motuum, quibus vel oculus circa orbitam, vel orbita circa oculum, vel oculus et orbita ſimul certa lege circa centrum aliquod commune feruntur; quo demum pacto conſiderationis noſtrae vſus in Aſtronomia innoteſcet.

3. Orbitas, quas corpora coeleſtia deſcribunt, et quarum apparentias inueſtigare volumus, in hoc negotio circulares omnes ſupponimus; et cum etiam circulos, qui in globis planetarum ducti finguntur, huc trahere velimus, per *orbitam* intelligemus quemuis circulum in ſyſtemate noſtro planetario, qui ſitum ſuum reſpectu fixarum conſeruat vel conſeruare poni poteſt, ſiue iſte quieſcat, ſiue circa centrum aliquod in curua quauis moueatur. Hoc modo circuli, quos circa planetas ſuos primarios deſcribunt ſatellites Iouis et Saturni; aequator, Solis, Lunae, terrae; annulus Saturni etc. nomen orbitae in hac tractatione merentur; imo et ipſae orbitae planetarum primariorum, modo circulares iſtas aſſumamus

 mus

mus. Negotium ſic omne reducitur ad inueſtigationem apparentiae circuli; et ſitus orbitae, eiusque conſeruatio reſpectu fixarum, conſideratis ſimul orbitae et oculi motibus, indicabit orbitae reſpectu oculi poſitionem, quam determinatio apparentiae eius ſupponit.

Fig. 1. 4. Detur quaeuis figura ADB, quam oculus in O locatus contempletur. Intelligatur planum PQ inter oculum et figuram quomodocunque poſitum, vel planum RS poſt figuram in ſitu quouis. Ex oculo O ad ſingula perimetri figurae ADB puncta ductae concipiantur rectae *pyramidem*, vt vocant, *opticam* formantes, quae ſecent plana PQ, RS, ita, vt his ſectionibus in illis oriantur figurae *adb*, $\alpha\delta\beta$: Figura ADB hoc modo dicitur *proiici* in plana PQ, RS; figurae *adb*, $\alpha\delta\beta$ inde reſultantes vocari ſolent eius *proiectiones*, et PQ, RS, *plana proiectionum*; vt ideo figurae proiectio detur per ſectionem pyramidis opticae a plano proiectionis effectam. Ex opticis iam conſtat, figuras *adb*, $\alpha\delta\beta$, in ſuis reſpectu oculi O poſitionibus oculum eodem modo afficere, quo figura ADB in ſuo ad oculum ſitu iſtum afficit; et figura ADB tunc dicitur *apparere* in plano PQ inſtar figurae *adb*, in plano RS inſtar $\alpha\delta\beta$. Apparentiam igitur obiecti indagaturi tantummodo reſpicere debemus ad eius proiectionem in datum planum; et apparentia circuli vel orbitae habebitur, ſi eius proiectio in aliquod planum vel figura inueſtigetur, quae ex ſectione coni optici a plano proiectionis facta oritur. Innumerae dantur eiusdem obiecti proiectiones pro diuerſa tum ipſius tum plani proiectionis reſpectu oculi poſitione. Limitemus proiectionum conditiones, vt ipſa obiecti proiectio ſimpli-

ſimplicior euadat, aſſignando conſtantem quendam plano proiectionis reſpectu oculi et obiecti ſitum. Ponamus nempe planum proiectionis ſemper tranſire per centrum obiecti et normale eſſe ad rectam ex oculo ad centrum obiecti ductam, vt huius proiectio in planum facta ſemper oculo directe opponatur. Conditionem hanc ipſa apparentiae obiecti, praeſertim remoti natura poſcere videtur. Obiecti remoti partes viſibiles ab oculo ad planum referri ſolent, quod ad eandem diſtantiam, qua obiectum ab oculo abeſt, poſitum cenſetur, quodque oculo directe opponitur. Partes omnes iudicantur in hoc plano ſitae, licet reuera extra iſtud locatae ſint, ſi quidem diſtantiae partium ab hoc plano reſpectu nimis magnae oculi ab eodem diſtantiae ſub ſenſus non cadunt. Sit globus e longinquo ſpectatus inſtar circuli eius maximi apparet, cuius planum ad rectam globi centrum et oculum iungentem normale eſt; et eodem modo corpora coeleſtia inſtar diſcorum videntur oculo directe oppoſitorum. Hanc igitur apparentiae vel proiectionis ideam proſecuturi in ſequentibus *apparentiam orbitae* definiemus per proiectionem eius in planum, quod per centrum orbitae tranſit et normale eſt ad rectam oculum et centrum hoc iungentem.

5. Poſitis his conditionibus, nonnullas generales apparentiae orbitarum ſpecies iam enumerare valemus, dum ſolummodo ad ſectionem coni optici attendere debemus a plano proiectionis factam, cuius reſpectu oculi poſitio ex hypotheſi datur. Sic, ſi orbitae reſpectu oculi eiusmodi ſit ſitus, vt planum eius productum per oculum tranſeat, ſeu ad planum proiectionis normale ſit, iſta inſtar rectae apparebit; hoc enim caſu conus opti-

cus abit in planum tranſiens per rectam oculum et centrum orbitae iungentem et ad planum proiectionis normalem, cuius proinde ſectio cum plano proiectionis rectam efficit. Si planum orbitae oculo directe opponatur, hoc eſt, ſi coincidat cum plano proiectionis; hoc conum opticum ſecabit in ipſo baſeos plano, et ipſa baſis ſectio erit; vnde orbita inſtar circuli apparebit. Si orbitae reſpectu oculi ea ſit poſitio, vt conum opticum transuerſim ſecet, quod ſit, ſi planum orbitae ad planum proiectionis quomodocunque inclinetur, ex hac coni ſectione oritur ellipſis, vt ex conicis conſtat, quae proinde apparentiam orbitae exhibet. Sed omnia exactiori modo pateſient, ſi primo conditiones, per quas conus opticus determinatur, examinemus, et deinde ex iis et plani proiectionis poſitione per hypotheſin data figuram ad calculum reuocemus, quam planum proiectionis conum opticum ſecando producit.

Fig. 1. 6. Sit ADB orbita circularis ſeu baſis coni optici, eius centrum C; oculus in O, OC axis coni. Mente intelligatur planum orbitae productum, in quod ex oculo O demiſſa ſit perpendicularis OG, ſecans iſtud in puncto G; iungatur GC in plano orbitae. Erit planum trianguli OCG normale ad planum orbitae ADB, et angulus OCG, quem rectae OC, CG ad centrum orbitae formant definiet poſitionem rectae OC reſpectu plani orbitae ADB. Conſtat iam, ſi dentur OC axis coni, AC radius baſeos et angulus OCG vel OCA, conum opticum OAB determinatum eſſe. In ſequentibus vocabimus OC *diſtantiam orbitae ab oculo*, AC *radium orbitae*, angulum OCA modo praecedenti definitum *poſitionem orbitae* re-

reſpectu oculi. Res igitur huc redit, vt ex datis orbitae radio, eius diſtantia ab oculo et poſitione reſpectu oculi inueſtigemus conditiones ſectionis, quam planum proiectionis reſpectu oculi poſitione datum in cono optico producit.

7. Sit AHBD orbita, eius centrum in C, oculus in O, vt OAHBD ſit conus opticus, cuius axis OC. Per C tranſeat planum proiectionis PQ normale ad OC, ad quod conus opticus productus intelligatur, vt facta huius ab iſto ſectione, figura EHFD oriatur in plano proiectionis, quae ellipſis erit, cum planum PQ conum transuerſim ſecet. Huius igitur ellipſeos conditiones determinare debemus. Habeat diameter orbitae ACB eiusmodi ſitum, vt angulus ACO, quem radius AC cum axe CO format, definiat poſitionem orbitae reſpectu oculi; erit per §. 6. planum per AC, CO, ſeu planum trianguli OAB normale ad planum orbitae; ſed idem planum OAB productum normale quoque eſt ad planum proiectionis vel ſectionis PQ, plano trianguli OAB tranſeunte per OC perpendicularem ad PQ. Hinc triangulum per axem coni AOB, ſi producatur, planum PQ ſecabit in recta EF, quae erit vnus ex axibus coniugatis ellipſeos EHFD, prout ex conicis conſtat; et haec recta EF ad OC perpendicularis erit, cum planum PQ tum ad planum OEF, tum ad rectam OC ſit normale. Syſtema linearum AB, EF, AO, CO, BO, quae omnes in eodem plano exiſtunt, euidentiae cauſa ſeorſim delineauimus in fig. 3. Porro planum PQ per centrum orbitae C tranſiens huius planum ſecat in recta HD aequali diametro orbitae; et eadem HD, cum ſectio ſit planum PQ et AHBD ad planum AOB

Fig. 2. Fig. 3. Fig. 2.

AOB normalium, normalis erit ad planum EFO vel ABO adeoque perpendicularis ad rectas OC, AB, EF in centro C concurrentes. Habentur ergo in ellipſi EH FD duae rectae EF, HD, ad ſe inuicem in puncto C normales, quarum altera EF cum ſit vnus ex axibus coniugatis, habebit alteram HD ordinatam in puncto C aequalem diametro orbitae, et CD vel CH ſemiordinatam radio orbitae aequalem. In fig. 4. ellipſin EH

Fig. 4. FD cum axe coniugato EF et ordinata ad ipſum HD; euidentiae cauſa, ſeorſim repraeſentauimus. Res iam huc reducta eſt, vt ex datis coni optici conditionibus nimirum, AC, OC, et ACO, inueniamus partes EC, CF, axis coniugati, quibus cognitis reliqua facili negotio innoteſcent.

8. Sint ergo radius orbitae AC ($=$ BC $=$ CD) $= a$, diſtantia orbitae ab oculo OC $= d$, poſitionis orbitae ad oculum ſeu anguli ACO ſinus $= s$, coſinus $= c$, exiſtente ſinu toto $= r$. In fig. 3. ex A et B in OC, vbi opus eſt, protractam, fiant perpendiculares AG, BI, quae parallelae erunt ad EF normalem ad OC; et oriuntur triangula ACG, BCI, rectangula ad G et I, quae ob AC $=$ BC, ACG $=$ ICB inter ſe aequalia erunt, ita vt ſit CG $=$ IC, AG $=$ BI. Cum ſit ſin. tot. (r): ſin. ACO vel ACG (s) $=$ AC (a): AG; dabitur AG $=$ BI $= \frac{as}{r}$; et quia ſin. tot. (r): coſ. ACO (c) $=$ AC (a): CG; habebitur CG $=$ IC $= \frac{ac}{r}$. Hinc OG $=$ OC $-$ CG $= d - \frac{ac}{r}$, et OI $=$ OC $+$ IC $= d + \frac{ac}{r}$. Iam ob AG, EF, IB inter ſe parallelas eſt OG ($d - \frac{ac}{r}$): AG ($\frac{as}{r}$) $=$ OC (d): EC, et OI ($d + \frac{ac}{r}$): BI ($\frac{as}{r}$) $=$ OC (d): CF; vnde da-

dabuntur $EC = \frac{asd}{dr-ac}$, $CF = \frac{asd}{rd+ac}$ et denique habebitur $EF = EC + CF \frac{2arsd^2}{r^2d^2 - a^2c^2}$.

9. Dantur iam in Ellipſi EHFD ſemiordinata CD $= a$, et partes EC, CF axeos EF ſemiordinatae CD reſpondentes; quaeratur ratio axium coniugatorum in Ellipſi. Hunc in finem biſecetur axis EF in puncto L, quod erit centrum Ellipſis, per quod ſi ducatur NM parallela ad ordinatam HD, habebitur alter axis NM, et ratio axium erit NM : EF. Iam ex natura Ellipſis eſt $LM^2 : EL^2$ hoc eſt $NM^2 : EF^2 = CD^2 : EC \times CF$ $= a^2 : \frac{asd}{rd-ad} \cdot \frac{asd}{rd+ac} = r^2d^2 - a^2c^2 : s^2d^2$, vnde $NM : EF = \sqrt{r^2d^2 - a^2c^2} : sd$. Ex eadem analogia ob $EF = \frac{2arsd^2}{r^2d^2 - a^2c^2}$ habebitur alter axis $NM = \frac{2ard}{\sqrt{r^2d^2 - a^2c^2}}$. T. VII Fig. 4.

10. Patet ergo, ex datis coni optici conditionibus dari proiectionem ſeu apparentiam orbitae. Per centrum enim orbitae C in plano proiectionis datum ſi quaeuis recta indefinita EF ducatur, quam ad OC (fig. 2.) diſtantiam orbitae ab oculo perpendicularem concipere debemus, et capiatur, $CE = \frac{asd}{rd - ac}$ ad eam plagam ad quam cadit perpendiculum OG (fig. 1.) ex oculo ad planum orbitae demiſſum, nec non $CF = \frac{asd}{rd+ac}$ ad plagam priori oppoſitam; habebitur axis EF, qui in L biſectus centrum ellipſeos vel proiectionis manifeſtat, a centro orbitae C diuerſum. Si denique in L excitetur NLM perpendicularis ad EF, et fiat $NL = LM = \frac{ard}{\sqrt{r^2d^2-a^2c^2}}$, dabitur alter axis NM et ellipſis conſtrui poterit. Fig. 2.

11. Inueſtigemus nunc variationes, quas patitur apparentia orbitae, variatis quibusdam coni optici conditio- Fig. 2. et 4.

 nibus.

nibus. Mancant radius orbitae et diſtantia eius ab oculo; euaneſcat autem angulus ACO, ſeu planum orbitae productum per oculum transeat. Hoc caſu fiet $s = 0$ $c = r$, adeoque EC, CF, EF, euaneſcent coëuntibus punctis E, L, F in puncto C; NM vero ($= \frac{2ard}{\sqrt{r^2 d^2 - a^2 c^2}}$) in punctum C translata euadet $= \frac{2ard}{\sqrt{r^2 d^2 - a^2 r^2}} = \frac{2ad}{\sqrt{d^2 - a^2}}$; vnde orbita apparebit inſtar rectae $= \frac{2ad}{\sqrt{d^2 - a^2}}$, quae in plano proiectionis per centrum orbitae C tranſit, in C biſecatur, et ad OC diſtantiam orbitae ab oculo normalis eſt. Fiat ACO rectus, ſeu orbita oculo directe opponatur vel planum eius congruat cum plano proiectionis; erit $s = r$, $c = 0$; quo caſu fiet EC($= \frac{asd}{rd - ac}$) $= a$, CF($= \frac{asd}{rd + ac}$)$= a$, ideoque EC$=$CF, coëuntibus punctis L, C, EF vero ($= \frac{2arsd^2}{r^2 d^2 - a^2 c^2}$) abibit in $2a$, et NM ($= \frac{2ard}{\sqrt{r^2 d^4 - a^2 c^2}}$) in punctum C translata degenerabit etiam in $2a$, Orbita igitur apparebit inſtar circuli, cuius centrum idem eſt cum centro orbitae et radius eius radio orbitae aequalis; ſeu orbita ipſa apparentiam ſuam exhibet.

12. Maneat poſitio orbitae reſpectu oculi ſeu angulus ACO (fig. 2.), varietur autem ratio inter diſtantiam orbitae ab oculo d et radium orbitae a. Sequentes hic occurrere ſolent caſus: vel enim d reſpectu a ita comparata eſt, vt $d = \infty$ cenſeri queat, vel $d > a$; vel $d = a$; vel $d < a$. Caſus, quo $d = \infty$ haberi poteſt exhibet proiectionem orbitae orthographicam et in Aſtronomia potiſſimum ocurrit; ſiquidem apparentiae orbitarum ſatellitum Iouis et Saturni, annuli Saturni, circulorum in planeta-

netarum corporibus ductorum huc pertinent. Caſus, quo $d > a$, in Aſtronomia locum habere poteſt, ſi orbitas Veneris et Mercurii circulares ſtatuere, et earum apparentias, oculo in centro terrae locato, inueſtigare velimus. Caſus, quo $d = a$, reſpicit proiectionem ſphaerae ſtereographicam, et ad caſum, quo $d < a$, in Aſtronomia referre licet apparentias orbitarum Saturni, Iouis et Martis pro circulis habitarum, oculo in centro terrae conſtituto. Singulos caſus ex ordine expendamus.

13. Si $d = \infty$; in expreſſionibus $EC = \frac{asd}{rd-ac}$, Fig. 4.
$CF = \frac{asd}{rd+ac}$, euaneſcit ac reſpectu rd, et fit tum EC, tum CF $= \frac{as}{r}$. Puncta igitur L et C in vnum coëunt et centrum ellipſis idem eſt cum centro orbitae. Axis NM $\left(= \frac{2ard}{\sqrt{r^2d^2 - a^2c^2}}\right)$ fit $= 2a$; et axis EF $\left(= \frac{2arsd^2}{r^2d^2 - a^2c^2}\right)$ euadit $= \frac{2as}{r}$. Igitur NM eſt axis maior et aequalis diametro orbitae; EF vero axis minor qui habetur, quaerendo quartam proportionalem ad ſinum totum, ſinum poſitionis orbitae reſpectu oculi et diametrum orbitae. Sit AB diameter orbitae, C centrum et Fig. 5.
ECA angulus poſitionis orbitae ad planum proiectionis aequalis complemento poſitionis orbitae reſpectu oculi ACG ad rectum, demittantur ex A et B in EF perpendicula AE, BF, erit EF axis minor quaeſitus, ſiquidem tum CF, tum EC $(= AG) = \frac{as}{r}$. Praeterea in hoc caſu, ſi planum orbitae productum ſtutuamus tranſire per oculum, factis $s = 0$, $c = r$ euaneſcit axis minor EF, et orbita apparebit inſtar rectae $NM = 2a$ ſeu diametro Fig. 4.
orbitae, in centro huius biſectae; ſin vero planum orbitae coincidat cum plano proiectionis, ſeu $s = r$, $c = 0$, orbita apparebit inſtar circuli ſibi et magnitudine et poſitione aequalis vt in §. 11.

14. Si $d > a$; valores $EC = \frac{asd}{rd - ac}$, $CF = \frac{asd}{rd + ac}$, $EF = \frac{2arsd^2}{r^2d^2 - a^2c^2}$, $NM = \frac{2ard}{\sqrt{r^2d^2 - a^2c^2}}$ manent, vt in §. §. 8. 9. et omnes poſitiui ſunt, ſiquidem $c > a$, $r > c$, adeoque $rd > ac$, $r^2d^2 > a^2c^2$. Igitur tantummodo examinare reſtat, quisnam ex axibus NM, EF, ſit maior, quis minor. In §. 9 inuenta eſt ratio $NM : EF = \sqrt{r^2d^2 - a^2c^2} : sd$; quare diſpicere debemus, quaenam ex quantitatibus $\sqrt{r^2d^2 - a^2c^2}$, sd, altera maior ſit. Hoc facilius fieri poterit, ſi, ob $r^2 = s^2 + c^2$, loco c^2 ſubſtituamus $r^2 - s^2$, vt fiat $\sqrt{r^2d^2 - a^2c^2} = \sqrt{r^2d^2 - a^2r^2 + a^2s^2}$ Iam ob $d > a$, vel $d^2 > a^2$ fiet $d^2(r^2 - s^2) > a^2(r^2 - s^2)$ ſeu $r^2d^2 - s^2d^2 > a^2r^2 - a^2s^2$, quare ſubtrahendo maiorem et minorem quantitatem ab eadem r^2d^2, fiet $r^2d^2 - r^2d^2 + s^2d^2 < r^2d^2 - a^2r^2 + a^2s^2$, hoc eſt $s^2d^2 < r^2d^2 - a^2r^2 + a^2s^2$ ſeu $sd < \sqrt{(r^2d^2 - a^2r^2 + a^2s^2)}$; vnde in hoc caſu erit NM axis maior, EF minor.

15. Si $d = a$, fient $EC \left(= \frac{asd}{rd - ac}\right) = \frac{as}{r - c}$, $CF \left(= \frac{asd}{rd + ac}\right) = \frac{as}{r + c}$, $EF = \left(\frac{2arsd^2}{r^2d^2 - a^2c^2}\right) = \frac{2ars}{r^2 - c^2}$, et (ob $r^2 - c^2 = s^2$) $= \frac{2ar}{s}$, $NM \left(= \frac{2ard}{\sqrt{r^2d^2 - a^2c^2}}\right) = \frac{2ar}{\sqrt{r^2 - c^2}} = \frac{2ar}{s}$. Hoc ergo caſu, ob $NM = EF$, orbita apparebit inſtar circuli, cuius radius $= \frac{ar}{s}$, centrum vero diuerſum erit a centro orbitae C, quemadmodum EC differt a CF.

16. Si $d < a$, valores $EC = \frac{asd}{rd - ac}$, $CF = \frac{asd}{rd + ac}$ $EF = \frac{2arsd^2}{r^2d^2 - a^2c^2}$, $NM = \frac{2ard}{\sqrt{r^2d^2 - a^2c^2}}$ manent, vt in §. §. 8. 9, qui vero mutationes quasdam patientur, prout rd vel $>$ vel $=$ vel $< ac$. Sed independenter ab his conditio-

tionibus, examinando rationem $NM:EF = \sqrt{r^2d^2 - a^2c^2} : sd$, eadem methodo, qua in §. 14. vſi ſumus, inuenietur $sd > \sqrt{r^2d^2 - a^2c^2}$, adeoque $EF > NM$, ſeu in caſu, quo ſectio ENFM eſt Ellipſis, EF erit axis maior, NM minor; et quaerendo ad EF maiorem, NM minorem axem, tertiam proportionalem, habebitur parameter huius ellipſis, quam vocabimus p, $= \frac{2ar}{s}$, cum ſit $\frac{2arsd^2}{r^2d^2 - a^2c^2} : \frac{2ard}{\sqrt{r^2d^2 - a^2c^2}} = \frac{2ard}{\sqrt{r^2d^2 - a^2c^2}} : p$, hoc eſt, $s : 1 = 2ar : p$, quae parametri expreſſio a dictis conditionibus quoque non pendet. Imo e valoribus $EC = \frac{asd}{rd - ac}$, $EC\ \frac{asd}{rd + ac}$ facile colligi poteſt, ſemper fore $EC > CF$ quaecunque ſit habitudo ipſius ac reſpectu rd; ſiue enim $rd >$ ſiue $< ac$, ſemper erit $rd - ac < rd + ac$, ideoque $\frac{asd}{rd - ac} > \frac{asd}{rd + ac}$ ſeu $EC > CF$; ſi vero $rd = ac$, fit $EC = \frac{asd}{0} = \infty$, manente valore ipſius CF finito. In quamcunque igitur figuram abeat ſectio ENFM, introductis conditionibus rd vel $>$ vel $=$ vel $<$ ac, ſemper erit $EC > CF$, $EF > NM$, et figurae inde reſultantis parameter $p = \frac{2ar}{s}$.

17. Euoluamus iam caſus, in quibus rd vel $> ac$, vel $= ac$, vel $< ac$. In fig. 3. in recta CO capiatur $CR = CA$ radio orbitae. Exiſtente oculo in R, caſus erit §. 15; ſi vero oculus inter R et C locetur, prodibit caſus §. 16, quo $d < a$. Sumatur iam AC pro ſinu toto, ad quem referantur s et c; fiet AG (normalis ad CO) $= s$, $CG = c$, $rd = ad$, et examen an $rd >, =$ vel $< ac$ huc redit, vt videamus, $ad >, =$ vel $<$ ſit quam ac, ſeu $d >, =$ vel $< c$, hoc eſt ipſi CG. Fig. 4.

Si oculus ponatur inter R et G, diſtantia centri orbitae ab oculo ſeu d maior erit quam CG, vnde in hoc caſu erit $ad > ac$, ſeu loco a reſtituto r, $rd > ac$. Si oculus locetur in G, fiet $d = c$, et $rd = ac$. Denique ſi oculus verſetur inter G et C, erit $d < c$, et $rd < ac$.

18. Ponamus iam oculum exiſtere inter R et G, quo caſu $rd > ac$; et valores ipſarum EC, CF, EF, NM, §. 16 exhibiti poſitiui manent et finitae magnitudinis; vnde orbita inſtar Ellipſis apparebit, cuius axis maior eſt $EF = \frac{2arsd^2}{r^2d^2 - a^2c^2}$, minor $NM \frac{2ard}{\sqrt{r^2d^2 - a^2c^2}}$, $EC = \frac{asd}{rd - ac}$, $CF = \frac{asd}{rd + ac}$, et parameter $p = \frac{2ar}{s}$.

Fig. 3. 4.

19. Sit oculus in G, quo caſu eſt $rd = ac$, $r^2d^2 = a^2c^2$; fiet $EF = \frac{2arsd^2}{0} = \infty$, $NM = \frac{2ard}{\sqrt{0}} = \infty$, $EC = \frac{asd}{0} = \infty$, $CF = \frac{asd}{rd + rd} = \frac{as}{2r}$, $p = \frac{2ar}{s}$; vnde $p \cdot CF = \frac{2ar}{s} \cdot \frac{as}{2r} = a^2 = CD^2$, quae eſt proprietas parabolae. Hoc ergo caſu orbita apparebit inſtar parabolae, cuius vertex eſt F, parameter $= \frac{2ar}{s}$.

20. Ponatur oculus inter G et C, quo caſu eſt $rd < ac$, et $r^2d^2 < a^2c^2$; vnde $rd - ac = -(ac - rd)$, $r^2d^2 - a^2c^2 = -(a^2c^2 - r^2d^2)$, et fiet $EF = \frac{2arsd^2}{-(a^2c^2 - r^2d^2)} = -\frac{2arsd^2}{a^2c^2 - r^2d^2}$, $NM = \frac{2ard}{\sqrt{-(a^2c^2 - r^2d^2)}}$ quantitas imaginaria, $EC = \frac{asd}{-(ac - rd)} = -\frac{asd}{ac - rd}$, $CF = \frac{asd}{ac + rd}$, $p = \frac{2ar}{s}$. Punctum ergo E (fig. 6) reſpectu punctorum C et F cadit in plagam priori (in fig. 4) oppoſitam, prout in valoribus ipſarum EF, EC, ſignum negatiuum indicat; vnde aſſignando hunc ſitum in fig. 6, erit $EF = \frac{2arsd^2}{a^2c^2 - r^2d^2}$, $EC = \frac{asd}{ac - rd}$; CF vero et p manent, vt ante

ante. Hinc $p. \frac{EC.CF}{EF} = \frac{\frac{2ar}{s} \cdot \frac{asd}{ac - rd} \cdot \frac{asd}{ac + rd}}{\frac{2arsa^2}{a^2c^2 - r^2d^2}} = \frac{2a^3rsd^2}{a^2c^2 - r^2d^2} \cdot \frac{a^2c^2 - r^2d^2}{2arsa^2} = a^2 = CD^2$, quae eſt proprietas hyperbolae, cuius vertex eſt F, axis transuerſus $EF = \frac{2arsa^2}{a^2c^2 - r^2d^2}$ parameter $= \frac{2ar}{s}$; et orbita in praeſenti caſu inſtar huius hyperbolae apparebit, qui caſus occurrit circa orbitas Saturni, Iouis et Martis, e terra ſpectatas, ſi iſtae circulares ſupponantur. NM (fig. 4. et 6) valorem habet imaginarium, qui indicat, quod recta NM in L puncto biſectionis ipſius FE applicata nusquam terminari poſſit per figuram HFD. Si ergo ab hac impoſſibilitate abſtrahamus, et ipſi NM valorem $= \frac{2ard}{\sqrt{a^2c^2 - r^2d^2}}$ attribuamus; habebitur recta, quae erit media proportionalis inter axem transuerſum EF et parametrum, quaeque axis hyperbolae minor vocari ſolet.

21. Satisſecimus iam ei tractationis noſtrae parti, qua ex datis orbitae radio, eius ab oculo diſtantia, eiusque reſpectu oculi poſitione apparentiam orbitae definire nobis propoſuimus. Reliquam igitur tractationis partem aggrediamur, in qua conditiones ad determinandam orbitae apparentiam neceſſarias ex conditionibus motuum tum oculi tum orbitae inveſtigare allaborabimus et ad vſum aſtronomicum accommodabimus. Horum motuum conditiones occurrere ſolent ſequentes, vt vel oculus circa orbitam immotum vel orbita circa oculum quieſcentem, vel oculus et orbita ſimul certa lege circa centrum aliquod commune ferantur, et quidem vel in plano eodem vel in planis a ſe inuicem diuerſis. Diſtinctam horum motuum ideam formare fas eſt.

22.

22. Sit orbita RTQt, per cuius centrum S tranſeat planum N i n, in quo oculus circa orbitam immotam deſcribat quamuis curuam nIN. Planum, in quo oculus mouetur, in ſequentibus vocabimus *planum oculi*, curuam vero nIN *ſemitam oculi*. Duplex iam caſus occurrit ratione poſitionis plani orbitae reſpectu plani oculi: vel enim prius cum poſteriori coincidit, vel planum orbitae ad planum oculi quomodocunque inclinatur. In caſu priori oculus, vbicunque verſetur in curua nIN, ſemper exiſtet in plano orbitae producto, et orbita ſemper inſtar rectae apparebit. In poſteriori caſu planum orbitae RTQt inclinatum ad planum oculi nIN alicubi ſecabit hoc veluti in recta RQ. Exinde variae notiones emergunt, quae explicari debent, antequam phaenomena apparentiae orbitae inueſtigemus. Recta RQ ſeu eius productio Nn, dicitur *linea nodorum* (planorum ſcilicet orbitae et oculi), et puncta coeli fixarum, ad quae linea nodorum dirigitur, *nodi* vocantur, quorum notitia poſitionem lineae nodorum manifeſtat. Puncta haec iterum a ſe inuicem diſtingui ſolent ratione plagae eleuationis vnius plani ſuper altero, quae plaga ſumitur iuxta directionem motuum coeleſtium ab occidente in orientem veluti in figura iuxta nIN vel QTR. Si iam planum orbitae RtQT ad planum oculi nIN referatur, et poſitio orbitae ita comparata ſit, vt iſta a puncto Q iuxta QTR ab occidente orientem verſus eleuetur ſuper plano oculi, ab R vero iuxta RtQ infra iſtud deſcendat: punctum coeli, ad quod recta SQn dirigitur, votur *nodus* orbitae *aſcendens*; id vero, quod reſpicit recta SRN, *nodus deſcendens*. Contrarium fit, ſi planum oculi

culi referatur ad planum orbitae, vbi prioris nodus aſcendens conſpicietur iuxta SRN, deſcendens iuxta SQ*n*. Breuitatis cauſa, ſumto *s* pro centro ſphaerae fixarum, ſubinde puncta Q, R; vel *n*, N, *nodos* appellabimus, quippe quorum poſitio directiones rectarum SQ*n*, SRN determinat. Lineae nodorum poſitio nodorumque diſtinctio cognita ſupponitur, ſi apparentiam orbitae inueſtigare velimus. Praeterea vero requiritur, vt nota quoque ſit *inclinatio* planorum orbitae et oculi ad ſe inuicem, ſeu angulus TSI, quem recta TS in plano orbitae ad lineam nodorum RQ in centro S normalis, conſtituit cum alia recta IS, ex eodem centro S ad eandem RQ in plano oculi normaliter excitata. His poſitis ſit oculus in A et concipiamus rectam SA, quae ſemper iungat oculum et centrum orbitae. Moto oculo ex A iuxta AIN oculus rectam AS circa centrum orbitae immotae S circumducet, quae proinde varias nanciſcetur poſitiones reſpectu lineae nodorum N*n*, per angulos *n*SA, vel NSA dignoſcendas, qui anguli *elongationes oculi a nodis orbitae* vocentur. Ad rectam SA in centro orbitae S ſemper normale eſt planum proiectionis (§. 4.) quod ideo ſemper normale perſeuerabit ad planum oculi, quamcunque poſitionem acquirat recta SA. Circumducta ab oculo recta AS circa S communicabit plano proiectionis motuum vertiginis circa axem in S ad planum oculi normalem. Quando oculus peruenit ad puncta *N* vel *n*, in quibus linea nodorum N*n* ſemitam oculi ſecat, recta AS cum NS vel *n*S coincidit et planum proiectionis normale fit ad lineam nodorum, adeoque normale ad plana tum oculi tum orbitae, tranſiens

ſiens per rectas TS, SI in planis orbitae et oculi reſpectiue perpendiculariter ipſi N*n* in S inſiſtentes. Hoc ergo caſu, cum planum orbitae productum per oculum transſeat orbita inſtar rectae apparebit inclinatae ad SI angulo TSI aequali inclinationi plani orbitae ad planum oculi. Perueniat oculus in I vel in locum huic oppoſitum *i*, ita vt recta IS vel *i s* in centro orbitae S perpendicularis ſit ad lineam nodorum N*n*. Oculus, qui nunc quadrante a nodis orbitae elongatus eſt, in *Limitibus orbitae* verſari dicatur. Hoc caſu planum proiectionis ſecabit planum oculi in linea nodorum N*n*; et angulus TSI, qui inclinationem orbitae ad planum oculi metitur, indicabit poſitionem orbitae reſpectu oculi (§. 6.) ſiquidem planum per IS, ST, normale eſt ad planum orbitae. Vnde ex datis TSI, IS, TS, apparentia orbitae vi praecedentium facile determinabitur. Denique ſit oculus in quouis alio loco A extra nodos et limites, et ſit recta BC, per centrum orbitae S traſiens, in plano oculi normalis ad SA diſtantiam oculi ab orbita. Planum proiectionis in recta BC ſecabit planum oculi, ex cuius reſpectu lineae nodorum poſitione et orbitae ad planum oculi inclinatione definiri debet poſitio mutua plani proiectionis, orbitae et oculi vt exinde apparentia orbitae innoteſcat, prout ſuo loco explicabimus.

23. Illuſtrationis gratia proferamus hic exempla aliquot ex Aſtronomia, quae duos praecedentes caſus reſpiciunt. Ponamus oculum in centro terrae, planum oculi vero idem cum plano eclipticae. Si iam eclipticam ſolis ſeu circulum corporis ſolaris, in quo planum eclipticae ſolem ſecat, pro orbita accipiamus, habebitur

caſus

caſus prior, quo planum orbitae cum plano oculi coincidit. Poſterior vero caſus prodibit, ſi aequatorem ſolarem vel circulum quemuis maximum globi ſolaris, qui ecliptica eius non eſt, pro orbita aſſumamus; vel ſi orbitas planetarum primariorum, quorum centrum eſt ſol, pro circulis habere et earum apparentias inueſtigare velimus. Fingamus oculum exiſtere in centro lunae, terra vero immota habeatur. Hoc modo orbita lunae nunc fiet ſemita oculi, et planum orbitae lunae erit planum oculi. Si igitur circulum, in quo planum orbitae lunaris globum terrae ſecat, pro orbita ſumamus, redibit caſus prior §phi. 22; poſterior vero caſus habebitur, ſi aequatorem terrae, eclipticam, meredianum vel quemuis alium circulum terrae maximum, qui in planum orbitae lunaris non incidit, inſtar orbitae conſideremus.

24. Sit oculus in S immotus, orbita MLG vero moueatur circa oculum in plano N *i n* I per oculum tranſeunte, in quo centrum orbitae N motu ſuo deſcribat curuam quamuis N *i n* I. Curuam hanc vocabimus *ſemitam orbitae*; planum vero N *i n* I, in quo centrum orbitae motum ſuum peragit, *planum primarium* dicemus. Hic duplex iterum occurrit caſus ratione poſitionis plani orbitae reſpectu plani primarii, vel enim planum orbitae cum primario coincidit, vel ad hoc quomodocunque inclinatur. In priori caſu orbita, vbicunque ponatur, inſtar rectae apparebit, cum planum eius productum ſemper per oculum tranſeat. In caſu poſteriori planum orbitae certo modo ſecabit planum primarium, cum ad hoc inclinatum ſit; vnde variae notiones iterum, vt in §. 22, formari debent, antequam Tab. VIII. fig. 9.

quam apparentiae orbitae phaenomena aſſignemus. Sit orbitae centrum in loco quouis ſemitae ſuae A, et planum orbitae $\gamma\lambda\mu$ ſecet planum primarium n I N in recta $\gamma\mu$, quam *lineam nodorum ſecundariam* vocabimus ob rationem mox afferendam. Rectae $A\gamma$, $A\mu$, directione ſua in coelo fixarum deſignabunt *nodos*, quorum iſte, quem ferit $A\gamma$, *aſcendens*, quem vero $A\mu$ reſpicit, *deſcendens nodus* erit, ſi nimirum a γ iuxta $\gamma\lambda\mu$ orbita ſuper plano primario eleuetur, et motus coeleſtes iuxta $\gamma\lambda\mu$ peragantur. Ex centro orbitae A in plano primario ducta ſit $A\sigma$ perpendicularis ad $\gamma\mu$, et ex eodem centro A in plano orbitae normalis erecta ſit $A\lambda$ ad $\gamma\mu$; angulus $\lambda A\sigma$, quem formant rectae λA, $A\sigma$, metietur *inclinationem* plani orbitae ad planum primarium. Haec inclinatio pariter ac poſitio lineae nodorum cognitae ſupponuntur in quaeſtione de apparentia orbitae. Per oculum in S conſtitutum ducta ſit in plano primario recta NSn parallela ad $\gamma\mu$; et ob infinitam ſphaerae fixarum reſpectu ſyſtematis noſtri planetarii magnitudinem, rectae SN, Sn, ad eadem coeli fixarum puncta tendent, ad quae diriguntur rectae $A\gamma$, $A\mu$; vnde oculus S nodum orbitae aſcendentem conſpiciet iuxta SN, deſcendentem iuxta Sn. Recta NSn vocetur *linea nodorum primaria*, quippe quae immota perſiſtit, et ad quam linea nodorum ſecundaria $\gamma\mu$ ſemper parallela eſt, in quocunque ſemitae ſuae loco centrum orbitae A verſetur. Orbitae ſcilicet in hac theoria ſitum ſuum reſpectu fixarum conſeruare ponuntur (§. 3.), quocunque motu progreſſiuo gaudeant; haec vero ſitus conſeruatio requirit lineas nodorum ſecundarias inter ſe et

ad

ad primariam parallelas, nec non inclinationem orbitae ſemper eandem ad planum primarium reſpectu fixarum immotum. Sic orbita ex A in I tranſlata ſitum reſpectu fixarum conſeruat, ſi linea nodorum ſecundaria *g m* in loco orbitae I parallela eſt tum ad $\gamma\mu$, tum ad N*n*, et ſi angulus *l*IS, quem inclinationem orbitae ad planum primarium metiri ponamus, idem eſt cum angulo $\lambda A \sigma$, ita vt ſitum reſpectu fixarum conſeruare, ſeu motu ſibi ſemper parallelo progredi, in eiusmodi translatione orbitae vnum idemque ſit. His poſitis ſit centrum orbitae in loco quouis ſemitae ſuae A, quod iungat recta AS cum oculo S, quae proinde in plano primario exiſtet. Planum proiectionis, quod per centrum orbitae tranſit et ad rectam SA normale eſt, ſemper normale erit ad planum primarium, idque ſecabit in recta BAC ad AS in A perpendiculari, ita, vt BAγ complementum ſit ipſius γAS vel AS*n* ad rectum. Moueatur centrum orbitae ex A iuxta AIN, et $\gamma\mu$ ſitum ſemper parallelum retinebit ad N*n*, angulus vero AS*n* ſeu ipſi aequalis γAS, quem *elongationem orbitae a nodo* dicamus, mutabitur, et cum ipſo angulus BAγ, decreſcente hoc, ſi iſte creſcit et viciſſim. Hoc modo recta BC circa A in gyrum agitur, et planum proiectionis inde acquirit motum vertiginis circa axem in A ad planum primarium normalem. Perueniat centrum orbitae in I vel *i*, vt angulus elongationis orbitae a nodo IS*n* vel *i*SN ſit rectus, quo caſu orbita in *limitibus* verſari dicitur. Recta BC nunc coincidet cum recta *mg* ad N*n* parallela; vnde hoc caſu planum proiectionis ſecabit planum primarium in linea nodorum ſecunda-

 ria

ria *mg*; angulus vero *l*IS qui inclinationem orbitae ad planum primarium metitur, indicabit poſitionem orbitae reſpectu oculi; ex qua et ex I*s* diſtantia orbitae ab oculo, nec non I*g* radio orbitae, apparentia huius determinari poterit. Verſetur centrum orbitae in punctis N vel *n*, in quibus linea nodorum primaria ſemitam orbitae ſecat, et linea nodorum ſecundaria MG cum primaria N*n* coincidet; planum proiectionis normale erit ad N*n* et planum primarium ſecabit in recta *bc* ad N*n* perpendiculari; orbita vero, cum planum eius productum per oculum tranſeat, inſtar rectae apparebit, cuius magnitudinem ex SN et MM datis per §. 11. definire licebit, et quae ad *bc* inclinata erit angulo LN*c* aequali inclinationi orbitae ad planum primarium. Sit tandem orbita in A loco quouis extra nodos et limites, et BC, vt ſupra, indicabit poſitionem plani proiectionis reſpectu lineae nodorum, ex qua et inclinatione orbitae ad planum primarium definiri debet poſitio mutua oculi et orbitae; vt ex iſta demum et ex AS, Aγ datis apparentia orbitae innoteſcat, prout ſuo loco exponemus.

25. Illuſtrationis gratia ponamus oculum in centro ſolis, centrum vero orbitae in centro terrae; et ſemita orbitae eadem erit cum orbita terrae, planum autem primarium idem cum plano eclipticae. Si iam eclipticam terrae ſeu circulum, in quo planum eclipticae terram ſecat, pro orbita aſſumamus, habebitur caſus prior §phi. 24, quo planum orbitae cum plano primario coincidit; poſterior vero caſus dabitur, ſi aequatorem terrae, Meridianum vel quemuis alium circulum terrae maximum, qui ecliptica non eſt, pro orbita accipiamus.

Idem

Idem caſus poſterior prodit, ſi de apparentia orbitarum ſatellitum Iouis, orbitarum ſatellitum Saturni, annuli Saturni, e ſole quaeſtio ſit, vbi in primo caſu ſemita orbitae eadem eſt cum orbita Iouis, et planum primarium idem cum plano orbitae Iouis; in ſecundo autem et tertio caſu ſemita orbitae eadem eſt cum orbita Saturni, et planum primarium idem cum plano orbitae Saturni. Ponamus oculum in centro terrae, quam immotam ſtatuamus, centrum autem lunae pro centro orbitae ſumatur; erit nunc ſemita orbitae eadem cum orbita lunae, et planum primarium idem cum plano orbitae lunae. Si igitur circulum, in quo planum orbitae lunaris corpus lunae ſecat, pro orbita habeamus, dabitur caſus prior §phi. 23; poſterior vero, ſi aequator lunae vel quiuis alius circulus eius maximus a praecedenti diuerſus pro orbita accipiatur.

26. Moueantur oculus et orbita circa centrum aliquod commune, quod ſit S; oculus deſcribat ſemitam QTR in plano oculi per S tranſeunte; orbitae vero centrum C moueatur in curua *n*IN in plano primario, quod etiam per S tranſeat. Sequentes iam caſus ſeſe offerunt. 1.) Planum oculi cum plano primario idem eſt, et planum orbitae etiam incidit in planum primarium. 2.) Plana oculi et primarium ad ſe inuicem inclinantur, planum autem orbitae coincidit cum plano primario. 3.) Planum orbitae ad planum primarium inclinatur, planum vero oculi idem eſt cum plano primario. 4.) Inclinantur tum planum orbitae ad planum primirium, tum planum primarium ad planum oculi. Singulos caſus perpendere expedit.

Tab. VII. fig. 9. Fig. 8. Fig. 7. Tab. VIII. fig. 10. Fig. 11.

§. 27.

Tab. VII. fig. 8. 27. Iaceat planum oculi QTR in plano primario *n*IN et planum orbitae BDA etiam ſitum ſit in plano primario. Oculus in quocunque ſemitae ſuae loco T verſetur, ſemper erit in plano orbitae producto nimirum in plano primario, vnde orbita ſemper inſtar rectae apparebit, et planum proiectionis ſemper normale erit ad planum primarium, hocque ſecabit in recta AB ad TC diſtantiam orbitae ab oculo perpendiculari; vt ideo facile ſit, ex datis TC, AC, in hoc caſu aſſignare apparentiam orbitae per §. 11.

Fig. 7. 28. Sit planum oculi QTR inclinatum ad planum primarium *n*IN angulo quouis TSI, quae plana, cum per centrum communae S tranſeant, ſeſe mutuo ſecabunt in recta aliqua RQ per S tranſeunte, ita vt NRSQ*n* productio ipſius RQ exhibeat lineam nodorum plani oculi et plani primarii. Sit centrum orbitae *bda* in quouis ſemitae ſuae *n*IN loco *c*, et planum orbitae congruat cum plano primario. Moueatur nunc oculus in ſemita ſua QTR; et quoties oculus appellit ad puncta Q, R, lineae nodorum, toties exiſtet in plano primario et plano orbitae producto; vnde hoc caſu orbita, vbicunque poſita ſit, inſtar rectae apparebit, et planum proiectionis normale erit ad planum primarium, ſecans hoc in recta perpendiculari ad rectam centrum orbitae et punctum R vel Q iungentem. Sit centrum orbitae in N vel *n*, et orbita quidem ſemper inclinabitur ad oculum, vbicunque ponatur oculus in ſua ſemita, exceptis locis Q, R; planum autem proiectionis ſemper, normale erit in N vel *n* ad planum oculi productum, ſecans hoc in recta, quae perpendicularis eſt ad rectam

ex

ex N vel *n* ad oculum ductam. Sit orbita in quouis loco *c* ſemitae ſuae, extra puncta N, *n*, et oculus in quouis loco T ſemitae ſuae, extra puncta R, Q. Iungat *c*T centrum orbitae et oculum, ad quam in plano primario perpendicularis ſit *ab* per *c* tranſiens; planum proiectionis quidem ſecabit planum orbitae vel primarium in recta *ab*, at, cum iſtud normale ſit ad *c*T, variis modis inclinabitur ad hoc pro diuerſo oculi et centri orbitae ſitu, quae inclinatio pariter ac poſitio orbitae reſpectu oculi diiudicari debent ex inclinatione rectae T*c* ad planum primarium, vnde demum, habita ſimul ratione ipſarum T*c*, *ac*, apparentia orbitae colligi poterit, vt ſuo loco oſtendetur. Tab. VIII. fig. 10.

29. Congruat planum oculi cum plano primario, ita, vt in eodem plano oculus deſcribat ſemitam QTR, centrum orbitae vero ſemitam *n*IN circa centrum commune S. Planum orbitae GLM inclinatum ſit ad planum primarium angulo quouis, et lineam MG, *mg*, $\mu\gamma$ inter ſe parallelae in diuerſis orbitae ſitibus referant lineneas nodorum ſecundarias, ad quas parallela ſit linea nodorum primaria N*n* per S tranſiens, vt in §. 24. Sit I*i* ad N*n* in S perpendicularis, vt ſi oculum in S fingamus (vt §. 24), orbita, quando ad I vel *i* peruenit, in limitibus verſetur. His poſitis ſit centrum orbitae GLM in quouis ſemitae ſuae loco K et oculus in quouis ſemitae ſuae loco T; iungatur TK, quae erit in plano primario. Igitur planum proiectionis per K tranſiens, cum ſemper normale ſit ad TK diſtantiam orbitae ab oculo, ſemper normale erit ad planum primarium, idque ſecabit in recta *bc* ad TK perpendiculari, vt *b*KM ſit complementum ad rectum anguli MKT, *qui elongationem or-*

bitae ab oculo indicat. Moueantur centrum orbitae in ſemita N*in*, et oculus in TRQ, quomodocunque; elongatio orbitae ab oculo MKT continuo mutabitur, et cum ipſa angulus *b*KM, qui poſitionem plani proiectionis reſpectu lineae nodorum MG determinat, vnde hoc modo planum proiectionis reſpectu ipſius MG quaſi acquirit motum vertiginis circa axem in K ad planum primarium normalem. Subinde iam pro diuerſo oculi et orbitae in ſuis ſemitis motu fieri poteſt, vt elongatio orbitae ab oculo MKT euaneſcat, quo caſu TK in GM productam ideoque in planum orbitae incidit et parallela fit ad lineam nodorum primariam N*n*; vnde planum orbitae productum per oculum tranſiens apparentiam orbitae inſtar rectae efficiet. Haec ergo pendet a conditione, vt angulus elongationis orbitae ab oculo MKT euaneſcat, vel, quod perinde eſt, vt recta TK, oculum et centrum orbitae iungens, parallela euadat ad lineam nodorum, primariam N*n*. Sit centrum orbitae in A; ducatur A*qr* parallela ad *n*O, ſecans ſemitam oculi in *q* et *r*; ponatur oculus in *q* vel *r*; et dabitur caſus apparentiae orbitae inſtar rectae. Planum proiectionis tunc normale erit ad lineam nodorum ſecundariam $\mu\gamma$, cum A*qr* congruentem, et ſecabit planum primarium in recta, ad quam inclinabitur recta, cuius inſtar orbita apparet, angulo aequali inclinationi orbitae ad planum primarium. Hoc modo ex conditione ante notata apparentia orbitae inſtar rectae ſemper colligi et definiri poteſt. Praeterea vero terminos exinde aſſignare licet, intra quos orbita in ſua ſemita poni debet, vt apparentia eius inſtar rectae poſſibilis euadat. Quoties nimirum recta A*qr* ex centro

tro orbitae ad lineam nodorum primariam *n*N parallela, ſemitam oculi ſecat, veluti in *q* vel *r*; toties poſſibilis eſt orbitae apparentia inſtar rectae: fieri enim poteſt, vt oculus ad *q* vel *r* perueniat eodem momento, quo centrum orbitae in A verſatur, et tunc actu locum habebit apparentia dicta. Quoties vero recta A*qr* ad *n*N parallela extra ſemitam oculi QTR cadit, toties impoſſibilis erit orbitae apparentia inſtar rectae. Ducantur BD, EF, ad *n*N parallelae, ſemitam oculi in T et *t* tangentes; hae deſignabunt B, D, E, F, loca ſemitae N*in*, in quibus orbita prima vel vltima vice inſtar rectae apparere poteſt, ſeu B, E, F, D, conſtituunt terminos, intra quos orbita poni debet, vt locus detur eiusmodi apparentiae, quos proinde *terminos apparentiae rectilineae* vocabimus. Dum orbita motu iuxta *in*I ad B peruenit, poſſibilitas eius apparantiae incipit, finitur vero translata orbita ex B in E; denuo incipit, quando orbita ad F appellit, et deſinit, orbita locum D relinquente. Miſſis his introducamus conditionem ex poſitione oculi et orbitae in ſuis ſemitis, angulum ſcilicet elongationis orbitae ab oculo MKT fieri rectum; quem caſum figura noſtra oſtendat, centro orbitae in H, oculo in *h*, poſitis, ita vt *n*H*h* ſit rectus. Igitur in hoc caſu planum proiectionis ſecabit planum primarium in linea nodorum ſecundaria *mg*, angulus vero *i*H*h* quem format recta H*h* cum *i*H ex H ad *mg* in plano orbitae normaliter excitata et qui inclinationem orbitae ad planum primarium metitur, determinabit poſitionem orbitae reſpectu oculi, ex qua et ex H*h*, H*m*, datis apparentia orbitae per praecedentia definiri poterit. Criterium huius caſus, quo poſitio orbitae reſpectu oculi ea-

dem eſt cum inclinatione orbitae ad planum primarium, habetur ex angulo *m*H*b* elongationis orbitae ab oculo, ſi iſte rectus ſit, vel ſi *b*H ad *mg* ſit perpendicularis. Hinc, cum H*b* producta etiam perpendicularis ſit ad N*n* (ob *mg*, N*n*, parallelas), ideoque H*b* ad IS, quam ſupra ad N*n* in S normalem fecimus, parallela; ex parallelismo rectarum H*b* et IS idem criterium habebitur, et ducendo ad IS*i* parallelas ſemitam oculi QTR vtrinque tangentes, termini, vt ante, aſſignari poterunt, intra quos centrum orbitae in ſua ſemita locari debet, vt poſſibilis euadat caſus aequalitatis poſitionis orbitae reſpectu oculi et inclinationis orbitae ad planum primarium. Tandem, ſi eiusmodi ſit orbitae in K et oculi in T poſitio, vt TK neque ad N*n* neque ad I*i* parallela ſit, vel ſi angulus elongationis orbitae ab oculo MKT ſit acutus vel obtuſus; ex iſto et inclinatione orbitae ad planum primarium, nec non TK, inueſtigari debat poſitio orbitae reſpectu oculi, vt demum apparentia orbitae inde deriuari poſſit, prout ſuo loco explicabitur.

T.VIII. fig.11. 30. Moueantur oculus et centrum orbitae in planis a ſe inuicem diuerſis ſed per commune centrum S tranſeuntibus. Semita oculi ſit QTR, orbitae *n*IN. Planum oculi QTR*t* ſecet planum primarium *n*IN in recta QR cuius productio ſit *n*N *linea nodorum plani primarii et plani oculi.* Facta relatione plani primarii ad planum oculi ſit *nodus aſcendens* in *n*, *deſcendens* in N, ita, vt planum primarium ab *n* iuxta *n*IN eleuetur ſuper plano oculi; ab N iuxta N*in* infra hoc deſcendat. Orbitae KLM centrum ſit in P, cuius planum ſecet planum primarium in recta MK, quae erit *linea nodorum ſucundaria*

ria orbitae et plani primarii; orbitae vero reſpectu plani primarii *nodus aſcendens* ſit in K, deſcendens in M, ita, vt a K iuxta KLM planum orbitae ſuper planum primarium aſcendat. Ponamus locum centri orbitae in P ita comparatum eſſe, vt KM producta tranſeat per S, et efficiat PS*p* *lineam nodorum primariam* orbitae ſcilicet et plani primarii. In P ſint LP in plano orbitae et λP in plano primario perpendiculares ad MK, vt LPλ menſuret *inclinationem plani orbitae ad planum primarium*. Porro in S ſint *t*S in plano oculi et σS in plano primario ad QR normales, vt *t*Sσ ſit *inclinatio plani primarii ad planum oculi*. His poſitis dentur nodi in coelo fixarum, tum plani oculi et plani primarii, tum orbitae et plani primarii, ſeu dentur lineae N*n*, P*p*, poſitione. Dentur praeterea anguli *t*Sσ, LPλ ſeu inclinationes plani primarii ad planum oculi et plani orbitae ad planum primarium. Ex his datis inuenire oportet conditionem apparentiae orbitae in quouis ſemitae ſuae loco. Hoc fieri nequit, niſi ex iisdem datis ante ſciatur 1) quae ſit poſitio plani orbitae reſpectu plani oculi, 2) qui ſit progreſſus plani orbitae reſpectu plani oculi, dum orbita in ſua ſemita motu ſibi ſemper parallelo transfertur.

31. Vt primo requiſito ſatisfiat, conferatur fig. 12 Tab. IX. fig. 12.
cum fig. 11. et ex S radio arbitrariae magnitudinis, quem = SN (fig. 11) aſſumamus, intelligatur circulus *n*I NP*i* in plano primario deſcriptus. Ex eodem centro S radio SE = SN in plano oculi QTR (fig. 11) producto deſcriptus ſit circulus NEB*n*G. Denique in plano orbitae KLM (fig. 11) per S producto ex centro S radio SP = SN deſcriptus concipiatur circulus A*p*HPE.

His factis circuli iſti, cum idem centrum et radios inter ſe aequales habeant, pro circulis maximis ſphaerae alicuius haberi poſſunt, cuius centrum eſt S, radius SN, qui in ſuperficie huius ſphaerae ſectionibus mutuis formabunt triangulum ſphaericum NPE vel *npe* huius conditionis 1) vt in N vel *n* ſit nodus plani primarii et plani oculi; 2) vt iuxta SP vel S*p* conſpiciatur nodus plani orbitae cum plano primario, ideoque angulus NSP vel *n*S*p*, ſeu arcus NP vel *np* menſuret elongationem nodi poſterioris a priori; 3) vt angulus ſphaericus ENP vel *enp* metiatur inclinationem plani primarii ad planum oculi 4) vt angulus ſphaericus EP*i* vel *ep*I ſit menſura inclinationis circulorum A*p*H*p*, N*in*I ſeu plani orbitae ad planum primarium, cuius complementum ad duos rectos eſt angulus ſphaericus NPE vel *npe*; 5 vt ES*e* ſit ſectio communis planorum orbitae et oculi productorum, quam *lineam nodorum primariam* horum planorum vocare licet, cum iſta per centrum commune S tranſeat, 6) vt angulus ſphaericus NEP(=AEB) ſeu *nep* ſit menſura inclinationis plani orbitae ad planum oculi. Iam ex conditionibus §. 30 datur poſitio mutua rectarum N*n*, P*p*, hoc eſt, datur elongatio nodi P orbitae cum plano primario a nodo N plani primarii cum plano oculi ſeu angulus NSP vel arcus NP. Dantur praeterea anguli ſphaerici ENP, NPE, quorum iſte aequalis eſt inclinationi plani primarii ad planum oculi, hic vero complementum eſt ad duos rectos inclinationis orbitae ad planum primarium. Dabuntur ergo reliqua trianguli ſphaerici NPE, nimirum 1) arcus NE vel angulus NSE, qui in plano oculi definit poſitionem rectae ES*e* vel li-

neae

neae nodorum primariae planorum orbitae et oculi reſpectu N*n* lineae nodorum plani primarii et plani oculi. 2) angulus ſphaericus NEP vel AEB ſeu inclinatio plani orbitae ad planum oculi; 3) arcus EP vel angulus ESP, qui in plano orbitae metitur diſtantiam nodi E orbitae cum plano oculi a nodo P orbitae cum plano primario; vt adeo ex duobus prioribus poſitio plani orbitae reſpectu plani oculi conſtet. Hoc notandum eſt, quod pyramis SNPE, quae a triangulo ſphaerico NPE tanquam baſi et centro communi S tanquam vertice formatur, terminetur planis NSP, NSE, PSE; quorum NSP eſt planum primarium, NSE planum oculi, PSE planum orbitae.

32. Alterum requiſitum concernit progreſſum plani orbitae reſpectu plani oculi dum orbita in ſua ſemita motu ſibi ſemper parallelo transfertur, ad quem diſtincte cognoſcendum ſequentia euoluamus. Sint duo plana NB, N*i*, angulo quouis ad *e* inuicem inclinata, quorum ſectio communis ſit recta N*n* ad S producta. Plana haec ſecentur a tertio plano PA, ita, vt planum PA productum tranſeat alicubi per rectam NS. Sectio communis planorum PA, N*i*, ſit recta PD; planorum PA, NB, recta EC. Intelligatur PD producta, quae alicubi in plano N*i* producto occurret rectae NS, veluti in S. Dico rectam EC productam ad idem punctum *S* tendere. Ex punctis N, *n*, rectae N*n* arbitrariis, in plano N*i* ducantur rectae quaeuis NP, *n*D inter ſe parallelae, et in D et P a plano PA terminatae. Ex iisdem punctis N, *n*, in plano NB concipiantur rectae quaeuis NE, *n*C, etiam inter ſe parallelae et in Tab. IX. fig. 13.

E

E et C a plano PA terminatae. Iungantur in plano PA puncta D, C; P, E, rectis DC, PE. Erunt plana *n*DC, NPE inter ſe parallela (Elem. XI. 15.), quae cum inſiſtant plano tertio PA in rectis DC, PE; erunt etiam DC, PE inter ſe parallelae (Elem. XI. 16) ideoque triangulum NPE ſimile triangululo *n*DC, et DC:PE = *n*D:NP. Sunt autem triangula S*n*D, SNP, ob *n*D, NP parallelas, etiam ſimilia, et *n*D : NP = SD: SP. Quare DC:PE = SD:SP; quae cum ſit proprietas trianguli SPE, cuius latera SP, SE, ſecantur a parallelis DC, PE; patet, EC productam per verticem huius trianpuli S tranſire debere.

33. Super plano N*i* transferatur planum PA motu ſibi parallelo, et preueniat verbi cauſa in ſitum *pa*, ob hanc ſitus paralleli conſeruationem 1) planorum PA, *pa*, ad planum N*i* eadem erit inclinatio; 2) recta *pd*, quae eſt ſectio planorum *pa*, N*i*, parallela erit ad PD (Elem. XI. 16) et producta ſecabit NS in S, vt ſit N*sp* = NSP; 3) recta *ec*, quae eſt ſectio planorum *pa*, NB, parallela erit ad EC (Elem. XI. 16), et producta tendet ad punctum *s* (§. 32), eritque N*se* = NSE. Datis ergo poſitione rectis NS, PS, ES, ſi detur quoduis punctum *p* plani N*i*, ad quod planum PA motu ſibi parallelo translatum peruenit, veluti in *pa*, huius plani *pa* ſitus reſpectu vtriusque plani N*i*, NB, poterit determinari. Si enim per *p* ad PS in plano N*i* agatur parallela *pds* ſecans N*n* productam in *s*, habebitur ſectio communis *pd* planorum *pa*, N*i*; et ſi ex puncto *s* iam definito in plano NB ducatur *sce* ad SE parallela

lela, dabitur *ce* ſectio communis planorum *p a*, NB, dabitur ergo poſitio plani *p a*, quod idem erit cum plano *pecd*, per rectas *pd*, *ec*, transeunte; et ſi quoduis punctum M rectae *ec*, iungatur cum puncto quouis Q rectae *pd*, per rectam MQ, haec in plano *pa* exiſtet.

34. Fiat iam applicatio dictorum ad ea, quae §. 30 ponuntur, vt inde apparentia orbitae innoteſcat, in quo negotio figuram 13. adhibebimus, cuius explicatio ex comparatione eius cum fig. 11. 12. facile intelligitur. Sit nimium *n* I N *i* orbitae ſemita figurae cuiusuis, quam tunc demum circularem mente concipere volumus, quando triangulum ſphaericum NPE conſiderari debet. QTR ſit ſemita oculi, *n* G N B eius productio vt in §. 31. Dabitur ergo per §. 31. triangulum ſphaericum NPE, et rectae SN, SP, SE, dabuntur poſitione. Orbitae centrum, quod hactenus in P locauimus, translatum intelligatur in locum quemuis ſemitae ſuae *p*. Per *p* in plano primario *n* I N *i* ducatur *p s* parallela ad PS ſecans N*n* in *s*; et ex *s* in plano oculi *n* G N B agatur *se* parallela ad SE; eritque planum *pse* parallelum ad planum PSE, et referet planum orbitae in *p* exiſtentis (§. 33.) Quoties iam recta *es* loco orbitae *p* reſpondens ſemitam oculi RTQ ſecat veluti in T vel *t*; toties poſſibilis eſt apparentia orbitae inſtar rectae, quae actu dabitur, ſi oculus tunc verſetur in interſectionis puncto T vel *t*, quando orbita appellit ad *p*: recta enim T*p* oculum et centrum orbitae iungens exiſtet in plano *pse* ſeu in plano orbitae producto. Si recta *es* extra ſemitam oculi cadit, impoſſibilis eſt apparentia orbitae inſtar rectae. Semitam oculi tangat Eσ ad ES paralle-

la; per σ in plano primario n I N i ducatur $z\ \sigma\ \pi$ ad SP parallela ſecans ſemitam orbitae in π et z; erunt π et z *termini apparentiae rectilineae*; et eadem methodo ex altera ſemitae oculi parte eiusmodi termini aſſignari poterunt. Facile haec patent, ſi comparentur cum iis, quae in §. 29. tradita ſunt. Ponatur centrum orbitae in N, vel n, nodo plani primarii et plani oculi, verſetur autem oculus in quouis ſemitae ſuae loco M; recta MN, quae centrum orbitae et oculum iungit, erit in plano oculi, et planum proiectionis in N ad planum oculi normale. Si oculus tunc appellat ad Q vel R, planum proiectionis normale erit ad Nn ideoque normale tum ad planum oculi tum ad planum primarium. Ponatur centrum orbitae in quouis, praeter N, n, ſemitae ſuae loco; quoties oculus ad rectam Nn, ſeu ad Q vel R peruenit, toties recta oculum et centrum orbitae iungens erit in plano primario, ad quod proinde planum proiectionis normale erit. His caſibus exceptis planum proiectionis diuerſimode inclinabitur tum ad planum primarium, tum ad planum oculi, ſi quidem recta ab oculo ad centrum orbitae ducta, ad quam planum proiectionis ſemper normale eſt, varias inclinationes reſpectu vtriusque plani ſubit quae inclinationes ex ſitu oculi et orbitae in ſuis ſemitis diiudicari debent, vt demum innoteſcat poſitio orbitae reſpectu oculi, ad apparentiam orbitae determinandam neceſſaria; id quod ſuo loco oſtendetur.

35. Caſus motus oculi et orbitae in diuerſis planis circa centrum commune, quem hactenus enucleauimus, in Aſtronomia occurrere ſolet circa ſatellites Iouis et Saturni,

turni, et annulum Saturni, oculo in terra poſito. Si de apparentia orbitae ſatellitis Iouis quaeſtio ſit, ſemita orbitae eadem erit cum orbita Iouis, et planum primarium idem cum plano orbitae Iouis. Orbita terrae nunc euadit ſemita oculi, et planum oculi abit in planum eclipticae. N*n* erit linea nodorum orbitae Iouis et eclipticae; et recta S P dirigetur ad nodos orbitae ſatellitis cum orbita Iouis; ex quibus poſitione datis phaenomena apparentiae orbitae ſatellitis, vt in §. 34, colligi poterunt. Pari modo applicatio ad orbitas ſatellitum Saturni eiusque annulum fieri poteſt. Intelligentur inde conditiones, quae apparentiam rectilineam orbitarum ſatellitum Iouis et Saturni vel euaneſcentiam annuli Saturni poſſibilem reddunt; cuius rei vberiorem explicationem in ſecunda de apparentiis orbitarum diſſertatione trademus.

DE
PERFICIENDIS MAPPIS GEOGRAPHICIS, INPRIMIS VNIVERSALIBVS, PER IDONEAS SCALAS METIENDIS DISTANTIIS INSERVIENTES.

Auctore

G. W. Richmann.

§. 1.

Methodus ſecundum perſpectiuae leges mappas geographicas delineandi adhuc prudenter in vſu eſt in vniverſalibus inprimis mappis deformandis; multa nihilominus in mappis his deſiderantur et illae tantis incommodis laborant, vt nulla ars iis remouendis idonea videatur. At cum fini conuenientiores hactenus inuentae non ſint contenti vt his ſimus, neceſſe eſt.

§. 2. Quia mappae geographicae ſingulorum locorum verum ſitum et diſtantias ab omnibus aliis in ipſis expreſſis definire debent, prima virtus mappae Geographicae eſt, vt magnitudines ſingularum regionum eam rationem habeant in mappa, quam habent in ſuperficie telluris, ſecunda eſt, vt eam figuram etiam in mappa exhibeant, quam in ſuperficie telluris ipſa obtinent, tertia, vt diſtantiae locorum ſint in ea ratione in mappa expreſſae, in qua ſunt diſtantiae locorum in ſuperficie telluris, quarta, vt ex mappa cerni poſſit, quot gradus ab aequatore locus diſtet, quot a primo meridiano?

§. 3. Methodus ſecundum perſpectiuae leges deformandi mappas primo requiſito plane non ſatisfacit: Secundum requiſitum vt exhibeat, ſedulo quidem occupata eſt, at cum tantum ſola ſpecie fallere ſtudeat, figuram ipſam regionum neutiquam ſiſtit: Tertium requiſitum deformatione ſecundum perſpectiuae artem aliquatenus et ex parte obtinetur quidem, diſtantiae enim locorum, quae vnum habent meridianum, cognito numero graduum arcus meridiani, loca iungentis, innoteſcunt; at gradus tamen ipſi ſunt inaequales, ergo diſtantiae non habent eam rationem in mappa, quam in ſuperficie telluris ſphaerica obtinent. Locorum vero, quae habent differentiam longitudinum, ſiue habeant eandem latitudinem, ſiue ſint in diuerſis parallelis, difficulter diſtantia accurate definiri poteſt et ſine vſu calculi et tabularum in ſubſidium vocato nihil efficitur. Quartum requiſitum ſolum dictis mappis perfecte obtinetur.

§. 4. Vt mappae geographicae ſola ſpecie nobis imponant non quidem eſt vt ſtudio laboremus, ſed potius vt rem ipſam, vti eſt, ſi in plano fieri poteſt, exprimant. Primum ergo quod requiritur, vt ſcilicet regiones in mappa eam habeant inter ſe rationem, quam habent in ſuperficie telluris, ludenti deformationis artificio merito eſt praeferendum, niſi aliud adſit, quod contrarium ſuadeat. Secundum quod requiritur, vt regiones in plano eam exhibeant figuram, quam in ſuperficie telluris habent i. e. vt in eo eiusdem magnitudinis et ſimilitudinis lineis eosdem angulos intercipientibus ſint terminatae, cum repugnantiam habeat, de eo obtinendo non eſt cogitandum. Tertio incommodo, quod mappis

geographicis perſpectiua affert, vt remedium, ſi quoddam adeſt adhibeatur neceſſe eſt. Si vero nulla ars ei prorſus tollendo par eſt, è re eſt vt tantum praeſtet, quantum praeſtare valet. Niſi obtineri poſſit, vt diſtantiae ipſae et chordae diſtantiarum exhibeantur, laborandum tamen, vt mappae ſint ſic compoſitae et aptatae, vt ex iis facili negotio diſtantiae inueniantur, cauendumque ſedulo, ne calculo taedioſo artificii laus vileſcat euaneſcatque.

§. 5. Cum dictis incommodis mappae geographicae, quae hactenus in vſu ſunt, laborent nullaque deformationis methodus inuenta ſit, neque inueniri poſſe videatur, qua ſimul omne, quod ad perfectionem mapparum requiritur, perfici poſſit, eae mappae reliquis ſine dubio ſunt praeferendae, quae vtiliſſimis problematibus ſoluendis idoneae ſunt; quae ſi nulla aliae ſunt, quam eae ipſae, quae ſecundum perſpectiuae leges deformantur, idonei modi ſuppeditandi ſunt, quibus apti reddamur, vt imperfectis his mappis commode vti poſſimus.

§. 6. Ego aliquam in hac re operam nauaturus ſcalas conſuetis mappis addam, quarum auxilio diſtantiae verae locorum inueniri poterunt, ſiue loca ſint in eodem parallelo, ſiue in diuerſis, ſiue eiusdem longitudinis ſiue diuerſae.

§. 7. Cum diſtantiae locorum ſint partes peripheriae circuli telluris maximi inter loca, quorum diſtantia eſt definienda, omnis labor in hoc conſiſtet, vt eae inueniantur.

§. 8.

§. 8. Omnes chordae arcuum peripheriae ſphaerae maximae ſunt dupla ſinuum arcuum dimidiorum; dato ergo quolibet arcu peripheriae ſpharae maximae, chorda eius ex tabulis ſinuum inuenitur et data chorda peripheriae ſpharae maximae arcus eius magnitudo ex iisdem tabulis innoteſcit.

§. 9. Sit nunc (1) duorum locorum A et B in eodem parallelo ſitorum a polo C diſtantia CA $=$ CB, cognita, cognita etiam erit chorda diſtantiae (per §. praec.) dicatur ea $= s$. (2) cognitus ſit angulus ACB, quem diſtantiae a polo intercipiunt, cognita igitur eſt etiam anguli chorda, quae arcum ipſius DE in peripheria ſphaerae maxima ſubtendit (ibid.), dicatur ea c. Tab. X Fig. 1.

Inueniendus eſt arcus peripheriae ſphaerae maximae loca A et B coniungens. Vt hoc obtineatur, chorda eius AB, quae definitam ad diſtantiam ipſam rationem habet eſt definienda. Ad hoc praeſtandum, ſinus diſtantiae a polo ſiue radius paralleli AF cognitus ſit neceſſe eſt, qui poſito radio ſphaerae $= r$, erit $= \frac{s}{2r} \sqrt{(4r^2 - s^2)}$ per principia Geometrica, et cum chorda arcus peripheriae ſphaerae maximae anguli dati ſit $= c$, erit tandem $r : c = \frac{s}{2r} \sqrt{(4r^2 - s^2)} : \frac{cs}{2r^2} \sqrt{(4r^2 - s^2)}$ i. e radius ſpraerae eſt ad chordam eius angulum datum in peripheria circuli ſphaerae maximi ſubtendentem, vt radius paralleli in ſphaera ad chordam arcus paralleli in ſphaera loca data coniungentis. Haec paralleli chorda ſubtendit vero ſimul arcum peripheriae ſphaerae maximae locis datis terminatum, i. e. locorum diſtantiam, erit ergo ſimul chorda diſtantiae locorum, quae erat inuenienda; vt diſtantia ipſa ſecundum §. 8. innoteſceret.

§. 10.

§. 10. Cum radius ſemper ſit cognitus et ipſis mappis exprimatur praedicto calculo ſuperſedere poſſimus, ſi omnibus mappis addatur

1. Scala, quae paralleli cuiuslibet in ſphaera radium ſiue ſinum diſtantiae a polo $= \frac{s}{2r} \sqrt{(4r^2 - s^2)}$ ſiſtat

2. Scala, quae chordas cuiuslibet arcus, in peripheria ſphaerae, maxima ſiue dupla ſinuum cuiuslibet arcus dimidii exhibeat.

§. 11. Hiſce adminiculis exiguo labore diſtantiae locorum in eodem parallelo inueniri poterunt.

Fig. 2. Dentur iterum primo duo loca A et B in eodem parallelo in mappa quadam, angulus cuius arcum chorda inuenienda ſubtendit, ſiue differentia longitudinum ex omnibus mappis cognoſcitur. Fiat deinde radio ſphaerae CK arcus peripheriae circuli ſphaerae maximi, transferatur circino ex ſcala chordarum laudata chorda KB anguli dati BCK, arcum BDK in peripheria circuli ſphaerae maximi ſubtendens in arcum radio ſphaerae delineatum, ducantur porro radii CK, CB ex centro circuli, angulum datum BCK intercipientes et radius paralleli ſphaerae ex ſcala radiorum parallelorum ſphaerae in radium ſphaerae CB; vnoque circini pede centro *c* arcus deſcripti impoſito, altero arcus *bda* extrema puncta *b* et *a* in radiis CA et CB notentur, diſtantia inter haec puncta breuiſſima *ab* erit non ſolum chorda paralleli in ſphaera, ſed etiam chorda diſtantiae quaeſitae § 9. Transferatur igitur haec circino in ſcalam chordarum, innoteſcet ſtatim arcus quaeſiti magnitudo numero graduum appoſito.

§. 12. Sint ſecundo duo loca in diuerſis parallelis et

et ſimul in diuerſis meridianis, ſiue habeant ambo latitudinem vel auſtralem vel borealem, ſiue vnus habeat latitudinem auſtralem alter vero borealem, definienda eſt locorum datorum diſtantia. Sit ABCHFA ſphaera, A ſit polus ſphaerae, vnus locus E et eius meridianus AEC, parallelus vero BEF, alter locus D et eius meridianus Fig. 3.
ADC, parallelus vero DGH erit differentia diſtantiarum cognitarum a polo A, BLD $=$ EMG, cuius chorda BD inuenitur, vt (§. 8) oſtenſum. Chorda BE in parallelo BEF et chorda DG in parallelo DGH inuenitur vt §. 9. docui. Cognitis his chordis minor ſubtrahatur a maiori e. g. BE a DG differentia chordarum diuidatur in duas partes aequales et linea GK innoteſcit, quam EK, normalis ad DG ex puncto E chordae BE, definit. Si GK a chorda DG ſubſtrahitur linea KD innoteſcit. Porro ex quadrato chordae EG ſubſtrahatur quadratum lineae GK, ſiue ſemidifferentiae chordarum in parallelis, et obtinebitur quadratum perpendiculi EK. Fiat etiam ex KD quadratum et addatur ei quadratum perpendiculi EK, ſumma erit quadratum chordae quaeſitae ED ſiue chordae diſtantiae loca E et D in ſphaera iungentis. Si ergo radix extrahatur ex dicta ſumma, innoteſcit calculo chorda. Vt ſolutio problematis in compendium mittatur, ſit vt ſupra radius ſphaere $= r$, chorda differentiae longitudinum in peripheria ſphaerae maxima $= c$ differentiae diſtantiarum a Polo $= a$, paralleli minoris radius $= p$, maioris P. Cum ergo chorda differentiae longitudinum in parallelo minori ſit $= \frac{pc}{r}$, in parallelo maiori $= \frac{Pc}{r}$ erit ergo GK $= \frac{Pc - pc}{2r}$. GK$q = \frac{P^2c^2 - 2Ppc^2 + p^2c^2}{4r^2}$ et EKq.

$= a^2 \frac{-P^2c^2 + 2Ppc^2 - p^2c^2}{4r^2}$ et $KDq. = \frac{P^2c^2 + 2pPc^2 + p^2c^2}{4r^2}$ tandem ergo diſtantiae locorum chorda $ED = \sqrt{(a^2 + \frac{pP^2}{r^2})}$.

§. 13. Sic calculo res expeditur, ſine Trigonom. Spaericae vſu, mei eſt, vt oſtendam qua ratione ſine omni calculo ope ſolius circini et regulae, mappis prius ſcala chordarum et radiorum parallelorum ſphaerae inſtructis, locorum in diuerſis parallelis diſtantia inueniri poſſit.

Fig. 4. Radio ſphaerae AB deſcribatur arcus circuli maximi et chorda differentiae longitudinum datarum BL, ex ſcala chordarum transſeratur circino in arcum radio ſphaerae delineatum et ducantur radii AB, AL. Ex centro arcus circuli maximi cum radiis parallelorum in ſphaera AC et AE, quorum diſtantiae a polo A dantur, ex ſcala radiorum parallelorum circino captis notentur puncta C, D, et E, F in radiis ſphaerae deſcriptis Deinde chorda EF differentiae longitudinum in parallelo maiori ducta, chorda CD differentiae longitudinum in parallelo minori circino transſeratur in chordam EF deſcriptam et ab ea ſubtrahatur, reſiduum GE diuidatur in duas partes aequales, et ex puncto diuiſionis H erigatur ad EF normalis HK infinita. Porro capiatur chorda DB differen- Fig. 3. et 4. tiae diſtantiarum datarum a polo (ſiue auſtrali, ſiue boreali, idem eſt) ex ſcala chordarum et ex puncto E chordae maioris EF determinetur cum chorda DB dicta punctum O normalem definiens. Diſtantia alterius extremitatis F chordae FE a puncto O transſeratur in ſcalam chordarum et innoteſcet locorum diſtantia numero graduum appoſito. Omnia collato §. 12. patent.

§. 14. Hactenus oſtendi, qua ratione mappae idoneis ſcalis perſici poſſint, neque dubito hac ratione mappas

pas perfectiores futuras, at cum mihi hiſce meditationibus inhaerenti inciderit methodus ſcalam radiorum parallelorum in ipſis mappis vniuerſalibus ſic delineandi, vt eo ipſo chordae diſtantiarum omnes in omnibus parallelis vel ipſa mappa expreſſae vel adplicata regula ad mappam definitae, ope circini in peripheriam circuli ſphaerae maximi transferri poſſint, etiam hanc ſubiungam.

§. 15. Si dimidia telluris ſuperficies in aequatoris plano eſt deformata in lineam meridianam CE, mappa expreſſam, meridiano primo propinquam ab aliis colore ſiue alia ratione diſtinctam, vt eo facilius inueniatur, radii multorum parallelorum ſphaerae, ſiue ſinus diſtantiarum a polo ex centro transferri poterunt et diſtantiarum a polo vel ab aequatore gradus adponi. Perſpicuum eſt chordas diſtantiarum eo ipſo in parallelis ipſa mappa eſſe definitas et adplicatis ad aequatorem mediante circino chordis diſtantias, loca in eodem parallelo iungentes, numero graduum appoſito innoteſcere Fig. 7.

Sint loca H et G, lineae C 80 et C 160. repraeſentant meridianos in hac deformatione, et $160° - 80° = 80°$ eſt differentia longitudinum, porro in linea CE, C 60. eſt radius paralleli ſphaerae, arcus *m* 60. *n* chorda *mn* chorda diſtantiae: Haec ſi ad aequatoris peripheriam adplicatur, diſtantia locorum in gradibus ipſa mappa expreſſa inuenitur.

§. 16. Si dimidia telluris ſuperficies in primi meri ridiani plano AFDGA eſt dilineata: in radium CE ex centro primi meridiani ad punctum E non procul a linea AD aequatorem exhibente ductum, ex centro primi meridiani omnium parallelorum in ſphaera radii, ſiue Fig. 8.

ſinus diſtantiarum a polo transferantur et numerus graduum diſtantiarum a Polo vel ab aequatore in ipſa mappa exprimatur vt ſupra (§. 15) dictum; Perſpicuum iterum eſt, regula quadam ad centrum meridiani primi et punctum in peripheria eius adplicita, quod arcum quendam, cuius initium punctum A terminat, finit, chordam diſtantiae a primo meridiano in quolibet parallelo ope circini transferri poſſe in meridiani primi peripheriam, et eodem modo diſtantiam ſtatim numero graduum appoſito innoteſcere. Sint rurſus loca H et G. lineae 90. 80. 90 et 90. 160. 90. repraeſentant meridianos in hac deformatione et 160-80 = 80 eſt diff. long. porro in linea C E, C60 eſt radius paralleli ſphaerae, A 80 = diff. long. et *m.60.n.* chorda *mn* chorda diſtantiae: haec ſi ad primi meridiani peripheriam adplicatur, vt ſupra, diſtantia locorum H et G in gradibus expreſſa inuenitur. Cognitis vero chordis differentiarum longitudinum locorum in diverſis a Polo diſtantiis chorda differentiae longitudinum in parallelo maiori circino transferatur ex mappa in chartam pariterque capiatur chorda differentiae longitudinum in parallelo minori ex mappa, reliqua fiant vt ſupra §. 13 oſtenſum.

§. 17. Satis ergo videre eſt, mappas inprimis vniverſales, quibus vtimur, ſcala radiorum parallelorum rite inſtructas multum perfectiores reddi. Vnicum adhuc addere liceat, de noua deformatione mappae vniuerſalis. Nemo Geographorum, quantum mihi quidem hactenus conſtat de ſuperficie ſphaerae telluris ſic in plano deformanda cogitauit, vt magnitudo partium eius ad ipſum totam rationem haberet debitam. Neque me huius rei ratio,

tio, niſi fallar, fugit. Cum nempe Gergraphi cernerent figuram tali deformatione nulla ratione reſpondere ſuperficiei telluris ipſi, chordasque diſtantiarum in parallelis mappae multo maiores fieri, quam eſſe deberent, delineationeque ſecundum leges perſpectiuae facta veris propinquiores obtineri, ſe operae practium non facturos opinati ſunt, ſi huicce delineationi inhaererent. At cum multae aliae deformationum rationes in particularibus praeprimis mappis ſint tentatae, quae eodem et maiori incommodo laborant, haecque quasdam proprietates habeat, quae in iis, quibus hactenus vtimur, deſiderantur, ſcalarumque metiendis diſtantiis inſeruientium appoſitione etiam hic iisdem incommodis eadem ratione obuiam eatur ac in vſitatis mappis, ego quidem aſſerere audeo, operam meam, ſi non magnae, alicuius tamen certe vtilitatis futuram, eoque magis excuſatum iri, quo compendioſius res expediri poteſt, vt ſtatim cernere eſt.

§. 18. Sumatur radius AC circuli ABDA in quo ſuperficies ſphaerae dimidia eſt deformanda, peripheria in 360 partes aequales diuidatur et chorda AB 90° erit diameter circuli, qui eſt ad priorem, vt circulus ſphaerae maximus ad ſuperficiem ſphaerae dimidiam, ſiue in ratione ſubdupla per principia Geom. diuidatur AB in duas partes aequales et cum dimidio lineae AB fiat circulus alteri concentricus: Dein eadem circini appertura pes circini alter gradus 360 fini circuli maioris e. g. puncto circa A imponatur et altero pede punctum E in peripheria circuli minoris quaeratur: ex hoc puncto E fiat arcus circuli AFC eadem circini appertura, qui puncto A et centro C finiatur. Quia AE $=\frac{1}{2}$AB AEC erit Fig. 5.

 rectus

rectus et conſequenter arcus AFC arcus circuli minoris 90 graduum. Repraeſentet arcus AFC primi meridiani partem et centrum circulorum C polum, circulus maior ABDA aequatorem, et dicto modo omnes reliqui meridiani per ſingulorum graduum initia, vel ſicuti Geographi in mappis ſolent per ſingulorum quinorum graduum initia tantum ducantur. Hoc facto meridianus primus AFC diuidatur in nonaginta ſuos gradus, numeris graduum appoſitis, et per ſingulorum graduum terminos ducantur ex centro ſiue Polo circuli, hi circuli exhibebunt parallelos. Porro ex tabula longitudinum et latitudinum locorum loca ipſa transferantur in mappam, vti a Geographis fieri ſolet, et tandem ſcala chordarum et radiorum parallelorum ſphaerae mappa inſtruatur, vti ſupra, vt earum ope diſtantiae locorum inueniri poſſint.

§. 19. Inter proprietates, quibus deſcripta mappa praecellit aliis, refero

1. quod locorum eiusdem meridiani diſtantias ipſas et chordas diſtantiarum exhibeat, vt cuilibet facile patet.

2. quod quaelibet pars in hac mappa rationem habeat ad quamlibet aliam quam habere debet. Hoc vt demonſtrem ſequenti ratione pergo:

Sit AFD ſemicirculus ſphaerae maximus, ſit AB chorda cuiusdam arcus, AC eiusdem arcus ſinus verſus, Fig. 6. erit per principia Geometrica

$$AD : AB = AB : AC$$

Sit AF alia chorda et AG ſinus verſus erit iterum AD: AF = AF : AG et ſic diameter ad quamlibet chordam eſt vt eadem chorda ad ſinum ſinum verſum. Conſeq.

$$\frac{AD.AC}{AD.AG} = \frac{AC}{AG} = \frac{AB^2}{AF^2}$$

et

et cum circuli ſint in ratione quadratorum diametrorum, circulus diametri A B erit ed circulum diametri A F = A C : A G. periterque quadruplum circuli diametri A B erit ad quadruplum circuli diametri A F = A C : A G. Cum hoc de omnibus chordis demonſtrari poſſit, quadrupla nempe circulorum chordarum eſſe in ratione ſinuum ſuorum verſorum, ipſaque ſint ipſi paralleli in mappa deſcripti, circuli paralleli in mappa deſcripti ſunt in ratione ſinuum verſorum arcuum, quorum chordis paralleli in mappa delineantur. At ſuperficies ſegmentorum ſphaerae, qui parallelis mappae exhibentur, parallelis ſphaerae terminatae ſunt pariter in ratione ſinuum verſorum reſpondentium arcuum per principia Geometrica. Ergo etiam circuli paralleli in mappa deformati ſunt in ratione ſuperficierum ſegmentorum ſphaerae parallelis ſpaerae terminatorum i, e. partes quaelibet in mappa habent ad totum rationem, quam habere debent.

§. 20. Dictis proprietatibus mappa deſcripta praecellit reliquis, at maiora certe videntur eſſe incommoda, quibus haec mappa prae aliis eſt obnoxia. Chordae diſtantiarum locorum, quae diuerſam habent longitudinem vt cuique inquirenti patebit et iudicatu facillimum eſt a veris maxime diſtant, eoque magis, quo paralleli aequatori propinquiores ſunt. Aequator ipſe non maior eſſe deberet peripheria circuli ſphaerae maximi, qui tamen eſt ad hanc vt ſubtenſa arcus 90° ad radium ſphaerae. Interim ex talibus mappis vno obtutu videre licet, quantum vna regio magnitudine aliam ſuperet, quod ope earum mapparum, quae in vſu ſunt, non fit.

DE

DE INTERPOLATIONE SIMPLICI MEDITATIONES.

Auctore

C. N. de Winsheim.

Antequam ars interpolandi, ſiue ratio implendi ſeriem numerorum ex differentiis ſecundis Cl. Virorum Gabrielis Mouton et Petri Horrebouii, ad manus meas peruenirent, cogitare coepi, quomodo numerus quicunque per datum numerum locorum ita diſtribui poſſit, vt ſumendo differentiam, ſaltus obſeruetur, aut plane nullus, aut ad minimum tolerandus.

Suppoſui autem ſequentia.

I. Numeros interpolandos aequaliter creſcere aut decreſcere debere.

II. Si vel maxime ad differentias ſecundas et tertias (ſi accurate procedendum) confugiendum ſit, numeros tamen ita comparatos eſſe debere, vt ſumma ἀκρίβεια, vel plane non deſideretur, aut ab illo, qui numeris vti velit, facile ſuppleri poſſit.

III. Fractiones non ante integro numero aequiparandos eſſe, quam dimidium excedunt iisque ſemper vnitatem adiiciendo, locum determinari poſſe, vbi nouus numerus ponendus.

IV. Per (a) numerum cognitum, a quo interpolandi initium fiat, aut praecedentem ſemper numerum; per (x) vero ſemper nouum numerum, per ſchema determinandum, ſignificari.

His

His ſuppoſitis ſperabam me taedioſa illa via liberari, qua fractiones per diuiſionem enatas, tentando rite diſponere, coactus eram, et leuiori opera metam contingere me poſſe; nec ſpem feſellit euentus, ſcilicet per ſeptem et quod excurrit annos culminationes ſolis et planetarum earumque altitudines meridianas, nec non varias alias tabulas, quibus ſaepenumero opus erat, ſequentibus ſchematibus et tabulis adiutus, breui temporis ſpatio et pro ſcopo ſatis accurate elaborare potui, id quod vel tentando aut ſubinde regulas praeſcriptas adhibendo, non ſine temporis diſpendio efficere potuiſſem, quamuis me, magis accurate omnia exhibere potuiſſe, non negauerim.

Hanc igitur methodum in vſum eorum qui eodem aut ſimili labore aliquando in Obſeruatorio Imperiali fungi debent, communicare partium mearum duxi, vt facilitatem iis eandem in calculo conciliarem Aſtronomico, quam ipſe expertus fui.

Sint e. g. data duo loca vacua, dies ſcilicet 12, et 13. Iunii.

Anno 1743.	11. Iun.	lat. ♃.	bor.	1°. 13′.
	12	-	-	
	13	-	-	
	14	-	-	1°. 12′.

vbi vnitas veniat interpolanda,

pro die 12. prodit $\frac{1}{3}$.

— — 13. — — $\frac{2}{3}$.

Sed quoniam numerus integer ſolum hic deſideratur et $\frac{1}{3}$ dimidium non ſuperat, ergo pro primo loco ponitur (a) pro 2do (x) $=$ $a\,x$ hinc in priori caſu,

vbi, (a) adeſt die 12. Iun. numerus praecedens 1°. 13′. retinetur, ſeu repetitur, et die 13. vnitas ipſi (hoc in paſſu, decreſcentibus ſcilicet numeris) ſubtrahitur, et ſic interpolata ſunt duo haec loca.

11	Iun.	lat. ♃.	bor.	1°.	13′.
12	—	—	—	1°.	13′.
13	—	—	—	1°.	12′.
14	—	—	—	1°.	12′.

Porro. Sit interpolanda vnitas tribus vacuis in locis. E. g.

Sit tranſitus ♂ per meridianum

d. 26. Febr. 23°. 13′.
27. —
28. —
29. —
1. Mart 23°. 12′. quoniam differentia, vnitas et loca tria interpolanda ſunt.

prodit pro loco primo $\frac{1}{3}$.
pro — ſecundo $\frac{2}{3}$.
pro — tertio $\frac{3}{3}$.

Quoniam $\frac{2}{3}$ iam dimidium ſuperant, hinc vnitas in medio ponitur, et ſic ſchema oritur ſequens

$$\begin{matrix} \frac{1}{3}. & \frac{2}{3}. & \frac{3}{3}. \\ a & x & a \end{matrix}$$

et loca vacua iam ſequentem in modum impleta ſunt.

die 26.	Febr.	23°.	13′.
27.	—	23.	13.
28.	—	23.	12.
29.	—	23.	12.
1.	Mart.	23.	12.

Sint

Sint interpolandi 2. numeri et loca adſint 3.

$\frac{2}{3}$. $\frac{4}{3}$. $\frac{6}{3}$.
x. *a*. *x*.

Scilicet *x* ponitur primo loco quoniam $\frac{2}{3}$ dimidium ſuperant, in loco medio autem ponitur *a* (qui numerum cognitum praecedentem indicat) quia $\frac{4}{3}$ vnitatem cum dimidio non ſuperant, ergo ſecundus numerus integer tertio demum loco poni debet.

Sint tandem 3. loca per 3. vnitates implenda, id fit prouti facile attendenti patet, ſingulas vnitates ſibi invicem addendo, aut ſubtrahendo, prouti numeri creſcunt aut decreſcunt; exinde oritur ſequens ſchema.

pro duobus locis

1	- - -	*a*	*x*
2	- - -	*x*	*x*
1	- - -	0	1
2	- - -	1	1
3	- - -	1	2
4	- - -	2	2
5	- - -	2	3
6	- - -	3	3 ſ. ſ.

pro tribus locis

1	- - -	*a*	*x*	*a*
2	- - -	*x*	*a*	*x*
3	- - -	*x*	*x*	*x*
1	- - -	0	1	0
2	- - -	1	0	1
3	- - -	1	1	1

4 - - -	1	2	1
5 - - -	2	1	2
6 - - -	2	2	2
7 - - -	2	3	2
8 - - -	3	2	3
9 - - -	3	3	3

Quamuis hactenus dicta ſufficere poſſe videantur, vt cui volupe fuerit vnusquisque pro data quantitate numerorum intermediorum diſtribuendorum, non ſolum ſchema ſed etiam tabulas ipſas ſibi parare poſſit, ne tamen aliquid ad perſpicuitatem huius methodi pertinens, praeteriiſſe videamur, adhuc vnico exemplo vſum tabulae A infra adiectae, in determinatione et examine ſchematum breuibus monſtrabimus.

Notum eſt Aſtrophilis planetarum motus ab iis qui Ephemerides conſcribunt ad calculos modo in quintum, modo in decimum quemque diem ex tabulis reuocari Aſtronomicis, intermediosque numeros in dies ſingulos diſtribui, prouti in Ephemeridibus Manfredi id obtinuiſſe teſtatur Franc. Maria Zanotti in ed 2. Erratorum inſigniorum Ephemeridum coeleſtium motuum Manfredi.

Faciamus iam periculum quomodo ſchema pro decem locis interpolandis conſtrui debeat.

Hic vſus eluceſcit tabulae A e qua quadratum ab 1 ad 10 deſumendum ſequentem in modum.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	16.	18.	20.
3.	6.	9.	12.	15.	18.	21.	24.	27.	30.
4.	8.	12.	16.	20.	24.	28.	32.	36.	40.
5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45.	50.
6.	12.	18.	24.	30.	36.	42.	48.	54.	60.
7.	14.	21.	28.	35.	42.	49.	56.	63.	70.
8.	16.	24.	32.	40.	48.	56.	64.	72.	80.
9.	18.	27.	36.	45.	54.	63.	72.	81.	90.
10.	20.	30.	40.	50.	60.	70.	80.	90.	100.

Singuli hi numeri hoc in caſu partes decimales ſignificabunt, ita vt prima ſeries

1. $\frac{1}{10}$. $\frac{2}{10}$. $\frac{3}{10}$. $\frac{4}{10}$. $\frac{5}{10}$. $\frac{6}{10}$. $\frac{7}{10}$. $\frac{8}{10}$. $\frac{9}{10}$. $\frac{10}{10}$.

2. $\frac{2}{10}$. $\frac{4}{10}$. $\frac{6}{10}$. $\frac{8}{10}$. $\frac{10}{10}$. $\frac{12}{10}$. $\frac{14}{10}$. $\frac{16}{10}$. $\frac{18}{10}$. $\frac{20}{10}$.

et ſic porro ſignificet.

Cogitetur porro dum vnitas per decem loca diſtribuenda ſit, illam non ante quam in ſexto loco poni poſſe, quoniam in loco quinto ſaltem $\frac{5}{10}$ = dimidium vnitatis adſit; $\frac{6}{10}$. autem dimidium iam ſuperat, huic $\frac{6}{10}$. tanquam primo loco vbi integer numerus ponendus, ſemper, prouti ſupra dictum fuit, adiiciantur vnitates, tot quod pro conditione ſchematis adiici poſſunt, $\frac{6}{10} + 1 = \frac{16}{10} + 1 = \frac{26}{10} + 1 = \frac{36}{10}$ ſq. Notentur ex his enati numeri 6. 16. 26. 36, 46. 56. 66. 76. 86. 96. etc.

Hi numeri ipſi, vbi in quadrato praedicto adſunt, aut ſi non adſunt numeri proxime maiores notentur aſteriſmo, prouti in ſequenti factum obſeruatur laterculo, quibus peractis loca non inſignita per *a* vbi aſteriſmus exſtat per *x* exprimantur, hoc pacto fundamen-

 tum

tum ſchematis ſequentis vna cum ipſo ſchemate elaboratum exhibemus, id quod quoque per duos ordines numerorum exprimere neceſſarium duximus.

1.	2.	3.	4.	5.	*6.	7.	8.	9.	10.
2.	4.	*6.	8.	10.	12.	14.	*16.	18.	20.
3.	*6.	9.	12.	15.	*18.	21.	24.	*27.	30.
4.	*8.	12.	*16.	20.	24.	*28.	32.	*36.	40.
5.	*10.	15.	*20.	25.	*30.	35.	*40.	45.	*50.
*6.	12.	*18.	24.	*30.	*36.	42.	*48.	54.	*60.
*7.	14.	*21.	*28.	35.	*42.	49.	*56.	63.	*70.
*8.	*16.	24.	*32.	*40.	*48.	*56.	64.	*72.	*80.
*9.	*18.	*27.	*36.	45.	*54.	*63.	*72.	*81.	*90.
*10.	*20.	*30.	*40.	*50.	*60.	*70.	*80.	*90.	*100.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
1. —	*a.*	*a.*	*a.*	*a.*	*a.*	*x.*	*a.*	*a.*	*a.*	*a.*
2. —	*a.*	*a.*	*x.*	*a.*	*a.*	*a.*	*a.*	*x.*	*a.*	*a.*
3. —	*a.*	*x.*	*a.*	*a.*	*a.*	*x.*	*a.*	*a.*	*x.*	*a.*
4. —	*a.*	*x.*	*a.*	*x.*	*a.*	*a.*	*x.*	*a.*	*x.*	*a.*
5. —	*a.*	*x.*	*a.*	*x.*	*a.*	*x.*	*a.*	*x.*	*a.*	*x.*
6. —	*x.*	*a.*	*x.*	*a.*	*x.*	*x.*	*a.*	*x.*	*a.*	*x.*
7. —	*x.*	*a.*	*x.*	*x.*	*a.*	*x.*	*x.*	*x.*	*a.*	*x.*
8. —	*x.*	*x.*	*a.*	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*	*a.*	*x.*	*x.*
9. —	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*	*a.*	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*
10. —	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*

I

1	—	0.	0.	0.	0.	0.	1.	0.	0.	0.	0.
2	—	0.	0.	1.	0.	0.	0.	0.	1.	0.	0.
3	—	0.	1.	0.	0.	0.	1.	0.	0.	1.	0.
4	—	0.	1.	0.	1.	0.	0.	1.	0.	1.	0.
5	—	0.	1.	0.	1.	0.	1.	0.	1.	0.	1.
6	—	1.	0.	1.	0.	1.	1.	0.	1.	0.	1.
7	—	1.	0.	1.	1.	0.	1.	1.	1.	0.	1.
8	—	1.	1.	0.	1.	1.	1.	1.	0.	1.	1.
9	—	1.	1.	1.	1.	0.	1.	1.	1.	1.	1.
10	—	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
11	—	1.	1.	1.	1.	1.	2.	1.	1.	1.	1.
12	—	1.	1.	2.	1.	1.	1.	1.	2.	1.	1.
13	—	1.	2.	1.	1.	1.	2.	1.	1.	2.	1.
14	—	1.	2.	1.	2.	1.	1.	2.	1.	2.	1.
15	—	1.	2.	1.	2.	1.	2.	1.	2.	1.	2.
16	—	2.	1.	2.	1.	2.	2.	1.	2.	1.	2.
17	—	2.	1.	2.	2.	1.	2.	2.	2.	1.	2.
18	—	2.	2.	1.	2.	2.	2.	2.	1.	2.	2.
19	—	2.	2.	2.	2.	1.	2.	2.	2.	2.	2.
20	—	2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.	2. etc.

Haec qui rite intellexit ſchemata noſtra , ante plures annos confecta , quae fundamenta tabularum praebent , ſi forte non recte conſtructa ſint , (in quod inquirendum nunc non vacat) ipſi corrigere , totque quot voluerit ſibi ſchemata tabulasque conſtruere poterit.

Sin autem minus volupe ſit tabulas prolixas (quae tamen absque vlla quaſi moleſtia ab vnoquoque in Arithmeticis vel leuiter verſato conſtrui poſſunt) ſupputare , etiam miſſis talibus abacis , dummodo ſchemata rite conſtructa ,

ſtructa, e praecedentibus nullo negotio conficienda, adſint, pro re nata ſibi tabulam peculiarem conficere valet, ſequentia obſeruando:

vbi duo loca interpolanda, ſingulos binos numeros
vbi 3 — — — — — ternos —
vbi 4 — — — — — quaternos —

nouum dare ordinem prouti e ſchematibus eum in finem conſtructis, et infra adiectis vnicuique ipſa intuenti patebit.

Supponatur Cometam quendam die 5. menſis cuiusdam habuiſſe longitudinem 13°. 10′. die 9. autem in longitudine 4°. 35′. promotum eſſe, quaeritur quaenam longitudo ſingulis diebus intermediis, ſcilicet 6. 7. 8. et 9. competat, ſtatuendo motum eius per hoc ſpatium temporis ſemper aequalem fuiſſe.

Sic ergo dantur 4°. 35′. per 4. loca diſtribuenda 60 :
240 :
35 ··
haec 275 minuta prima 275

per 4. diuiſa, dant multiplum quaternarii proxime minus, ſcilicet 68. Quod indicio eſt vltimum ordinem numerorum per quaternos numeros diſpoſitorum, deſiiſſe per 68. et quidem e regione numeri 272. ſequentem in modum

269	67. 67. 68. 67.
270	67. 68. 67. 68.
271	68. 67. 68. 68.
272	68. 68. 68. 68.

nam 68
68
68
68

quater ſibi additi dant 272.

Ergo

Ergo nouum ordinem, ſeu abacum peculiarem, pro

273	conſtituendum eſſe conſulendo ſchema
274	
275	
276	

a. a. x. a.
a. x. a. x.
x. a. x. x.
x. x. x. x.

Notetur ſaltim, quod ſupra monuimus, vbi (a) inueniatur, ibi praecedentem numerum, hoc loco 68. ponendum, vbi vero (x) praecedenti numero vnitatem adiiciendam eſſe.

Hinc pro 273.	ponatur	68. 68. 69. 68.
274.		68. 69. 68. 69.
275.		69. 68 69. 69.
276.		69. 69. 69. 69.

ſicque datus numerus 275. primorum minutorum = 4°. 35'. ſequentem in modum diſtributus fuit.

die 5 — 13°. 10'	69	
6 — 14. 19.	68	
7 — 15. 27.		= 275 = 69. 68. 69. 69.
8 — 16. 36.	69	
9 — 17. 45.	69	

Neque tamen opus erit in numeris praeſertim maioribus e. g. vbi 10. aut 15. ſeries ad ordinem implendum requiruntur, ſchema integrum conſtruere, aut in numeris exhibere, ſufficere poterit ſequens compendium e tabula A. hauriendum. Sit datus numerus 386. inter decem loca intermedia diſtribuendus, inſtituatur diui-

ſio per decem, prodit quotus 38. et remanent $\frac{6}{15}$. qui indicio eſt, interpolationem iſtam per 38. quater ſumtos, et 39. ſexies ſumtos inſtitui debere, ſcilicet

38.	39.
38.	39.
38.	39.
38.	39.
152.	39.
	39.
	234.

152. + 234. = 386.

Sit iterum datus numerus 729. pro interpolatione 15. in locis inſtituenda

$\frac{729}{15} = 48. + \frac{9}{15}.$

e quo concludere licet, 6. loca per 48. et reliqua 9. per 49. implenda eſſe, quoniam 48. 6. = 288. et 49. 9. = 441. et 441. + 288. = 729.

Dico his in caſibus minime opus eſſe, vt pro decem aut quindecim locis integra conſtruantur ſchemata. Nil amplius requiritur, quam vt priori in caſu e laterculo 10. numerorum ſeries ſexta, quoniam fractio quotientis eam requirit 6. 12. 18. 24. 30. 36. 42. 48. 54. 60. in ſecundo paſſu autem e quadrato pro quindecim numeris ſeries 9na. ob eandem rationem deſumatur 9. 18. 27. 36. 45. 54. 63. 72. 81. 90. 99. 108. 117. 126. 135. et quoniam $\frac{6}{15}$ in priori, $\frac{9}{15}$ in poſteriori caſu dimidium ſuperant, fractioni $\frac{6}{15}$. numerum integrum ſemper pro extenſione ſeriei addendo, prodevnt numeri ſupra commemorati 6. 16. 26. 36. 46. 56. 66. 76. et fractioni alteri $\frac{9}{15}$. ſemper 15. addendo prodit

dit ſequens numerus 8. 23. 38. 53. 68. 83. 98. 113. 128. qui vbi inueniuntur vel ipſi vel numeri proximi maiores aſterismo inſigniri debent, reliquis praetermiſſis, exinde enatae ſunt ſequentes ſeries *6. 12. *18. 24. *30. *36. 42. *48. 54. *60. quibus ſi numeri 38. et 39 debito modo ſubſtituantur prodit ſequens ordo 39. 38. 39. 38. 39. 39. 38. 39. 38. 39.

Simili modo procedendo pro 15. ponuntur primo *9. 18. *27. 36. *45. *54. 63. *72. 81. *90. *99. 108. *117. 126. *135. quibus ſi ſubſtituantur numeri 48. et 49. quos diuiſio numeri 729. per 15. indicauit, ſequentem in modum diſpoſiti inueniuntur, 49. 48. 49. 48. 49. 49. 48 49. 48. 49. 49. 48. 49. 48. 49. ita vt minime opus ſit ſchema totum elaborare, aut tabulas prolixas ſibi conſtruere.

Hac methodo ii praeſertim frui poterunt, qui aut rariſſime, aut ſaltim in vno alterone caſu interpolationem inſtituunt.

Cetera quae forte monenda reſtant inſpectio ſchematum aeque ac tabularum adiectarum, vnumquemque eas adhibentem laeui opera docebit.

Tabula A.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72	75	78	81	84	87	90
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100	104	108	112	116	120
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154	161	168	175	182	189	196	203	210
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176	184	192	200	208	216	224	232	240
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198	207	216	225	234	243	252	261	270
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	242	253	264	275	286	297	308	319	330
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240	252	264	276	288	300	312	324	336	348	360
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	273	286	299	312	325	338	351	364	377	390
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	294	308	322	336	350	364	378	392	406	420
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300	315	330	345	360	375	390	405	420	435	450
16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320	336	352	368	384	400	416	432	448	464	480
17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340	357	374	391	408	425	442	459	476	493	510
18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360	378	396	414	432	450	468	486	504	522	540
19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380	399	418	437	456	475	494	513	532	551	570
20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400	420	440	460	480	500	520	540	560	580	600
21	42	63	84	105	126	147	168	189	210	231	252	273	294	315	336	357	378	399	420	441	462	483	504	525	546	567	588	609	630
22	44	66	88	110	132	154	176	198	220	242	264	286	308	330	352	374	396	418	440	462	484	506	528	550	572	594	616	638	660
23	46	69	92	115	138	161	184	207	230	253	276	299	322	345	368	391	414	437	460	483	506	529	552	575	598	621	644	667	690
24	48	72	96	120	144	168	192	216	240	264	288	312	336	360	384	408	432	456	480	504	528	552	576	600	624	648	672	696	720
25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300	325	350	375	400	425	450	475	500	525	550	575	600	625	650	675	700	725	750
26	52	78	104	130	156	182	208	234	260	286	312	338	364	390	416	442	468	494	520	546	572	598	624	650	676	702	728	754	780
27	54	81	108	135	162	189	216	243	270	297	324	351	378	405	432	459	486	513	540	567	594	621	648	675	702	729	756	783	810
28	56	84	112	140	168	196	224	252	280	308	336	364	392	420	448	476	504	532	560	588	616	644	672	700	728	756	784	812	840
29	58	87	116	145	174	203	232	261	290	319	348	377	406	435	464	493	522	551	580	609	638	667	696	725	754	783	812	841	870
30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	33	360	390	420	450	48	510	540	570	600	630	660	690	720	750	780	810	840	870	900

Tab. B.

2.

a	*x*
x	*x*
1	

3.

a	*x*	*d*
x	*a*	*x*
x	*x*	*x*
$\frac{2}{3}$.	5.	8.

4.

a	*a*	*x*	*a*
a	*x*	*a*	*x*
x	*a*	*x*	*x*
x	*x*	*x*	*x*
$\frac{3}{4}$.	7.	11.	15.

5.

a	*a*	*x*	*a*	*a*
a	*x*	*a*	*x*	*a*
x	*a*	*x*	*a*	*x*
x	*x*	*a*	*x*	*x*
x	*x*	*x*	*x*	*x*
$\frac{3}{5}$.	8.	13.	18.	23.

6.

a	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*
a	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*
a	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*
x	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*
x	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*
$\frac{4}{6}$.	10.	16.	22.	28.	34.

7.

a	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*
a	*x*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*
a	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*
x	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*
x	*a*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*
x	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*
$\frac{4}{7}$.	11.	18.	25.	32.	39.	46.

8.

a	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*
a	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*
a	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*
x	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*
x	*a*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*
x	*a*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*
x	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*x*
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*
$\frac{5}{8}$.	13.	21.	29.	37.	45.	53.	61.

9.

a	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*a*
a	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*
a	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*
a	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*
x	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*
x	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*
x	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*
x	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*x*
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*
$\frac{5}{9}$.	14.	23.	32.	41.	50.	59.	68.	77.

10.

10.

a	*a*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*a*
a	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*
a	*x*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*
a	*x*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*
a	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*
x	*a*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*
x	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*
x	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*
x	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*

$\frac{6}{10}$. 16. 26. 36. 46. 56. 66. 76. 86. 96.

11.

a	*a*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*
a	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*
a	*x*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*
a	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*
a	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*
x	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*
x	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*
x	*a*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*
x	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*

$\frac{6}{11}$. 17. 28. 39. 50. 61. 72. 83. 94. 105. 116.

12.

a	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*
a	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*
a	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*
a	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*
a	*x*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*
a	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*
x	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*
x	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*
x	*a*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*
x	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*
$\frac{7}{12}$.	19.	31.	43.	55.	67.	79.	91.	103.	115.	127.	139.

13.

a	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*
a	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*
a	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*
a	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*
a	*x*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*
a	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*
x	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*
x	*a*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*
x	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*
x	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*
x	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*
$\frac{7}{13}$.	20.	33.	46.	59.	72,	85.	98.	111.	124.	137.	150.	103.

14.

a	a	a	a	a	a	a	x	a	a	a	a	a	a
a	a	a	x	a	a	a	a	a	a	x	a	a	a
a	a	x	a	a	a	a	x	a	a	a	x	a	a
a	x	a	a	a	x	a	a	x	a	a	a	x	a
a	x	a	a	x	a	a	x	a	x	a	a	x	a
a	x	a	x	a	x	a	a	x	a	x	a	x	a
a	x	a	x	a	x	a	x	a	x	a	x	a	x
x	a	x	a	x	a	x	x	a	x	a	x	a	x
x	a	x	x	a	x	a	x	x	a	x	x	a	x
x	a	x	x	x	a	x	x	a	x	x	x	a	x
x	x	a	x	x	x	a	x	x	x	x	a	x	x
x	x	x	a	x	x	x	x	x	x	a	x	x	x
x	x	x	x	x	x	a	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

$\frac{8}{14}$ 22. 36. 50. 64. 78. 92. 106. 120. 134. 148. 162. 176. 190.

a	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*
a	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*
a	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*
a	*x*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*
a	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*
a	*x*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*
a	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*
x	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*
x	*a*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*
x	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*
x	*a*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*
x	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*
x	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*

8/13. 23. 38. 53. 68. 83. 98. 113, 128. 143. 158. 173. 188. 203. 218.

a	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*
a	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*
a	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*
a	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*
a	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*
a	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*
a	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*
a	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*
x	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*
x	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*
x	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*
x	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*
x	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*
x	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*

9. 25. 41. 57. 73. 89. 105. 121. 137. 153. 169. 185. 201. 217. 233. 249.

a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	x	a	a	a	a	a	a	a	a	a
a	a	a	a	a	x	a	a	a	a	a	a	a	a	a	x	a	a	a	a
a	a	a	x	a	a	a	a	a	a	x	a	a	a	a	a	x	a	a	a
a	a	x	a	a	a	a	x	a	a	a	a	x	a	a	a	a	x	a	a
a	a	x	a	a	a	x	a	a	a	x	a	a	a	x	a	a	a	x	a
a	x	a	a	a	x	a	a	x	a	a	x	a	a	a	x	a	a	x	a
a	x	a	a	x	a	a	x	a	a	x	a	x	a	a	x	a	a	x	a
a	x	a	x	a	a	x	a	x	a	a	x	a	x	a	a	x	a	x	a
a	x	a	x	a	x	a	x	a	a	x	a	x	a	x	a	x	a	x	a
a	x	a	x	a	x	a	x	a	x	a	x	a	x	a	x	a	x	a	x
x	a	x	a	x	a	x	a	x	x	a	x	a	x	a	x	a	x	a	x
x	a	x	a	x	x	a	x	a	x	x	a	x	a	x	x	a	x	a	x
x	a	x	x	a	x	x	a	x	x	a	x	a	x	x	a	x	x	a	x
x	a	x	x	x	a	x	x	a	x	x	a	x	x	x	a	x	x	a	x
x	x	a	x	x	x	a	x	x	x	a	x	x	x	a	x	x	x	a	x
x	x	a	x	x	x	x	a	x	x	x	x	a	x	x	x	x	a	x	x
x	x	x	a	x	x	x	x	x	x	a	x	x	x	x	x	a	x	x	x
x	x	x	x	x	a	x	x	x	x	x	x	x	x	x	a	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	a	x	x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

$\frac{11}{20}$. 31. 51. 71. 91. 111. 131. 151. 171. 191. 211. 231. 251. 271. 291. 311. 331. 351. 371. 391

Tabula

Tabula C.

2

a. *x.*
x. *x.*

1	*a*	*x*
2	*x*	*x*
1	0	1
2	1	1
3	1	2
4	2	2
5	2	3
6	3	3
7	3	4
8	4	4
9	4	5
10	5	5

etc.

3

a. *x.* *a.*
x. *a.* *x.*
x. *x.* *x.*

1	0	1	0
2	1	0	1
3	1	1	1
4	1	2	1
5	2	1	2
6	2	2	2
7	2	3	2
8	3	2	3
9	3	3	3
10	3	4	3
11	4	3	4
12	4	4	4

etc.

4

a. *a.* *x.* *a.*
a. *x.* *a.* *x.*
x. *a.* *x.* *x.*
x. *x.* *x.* *x.*

1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	1	0	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	2	1
6	1	2	1	2
7	2	1	2	2
8	2	2	2	2
9	2	2	3	2
10	2	3	2	3
11	3	2	3	3
12	3	3	3	3
13	3	3	4	3
14	3	4	3	4
15	4	3	4	4
16	4	4	4	4

 etc.

5

a.	*a.*	*x.*	*a.*	*a.*
a.	*x.*	*a.*	*x.*	*a.*
x.	*a.*	*x.*	*a.*	*x.*
x.	*x.*	*a.*	*x.*	*x.*
x.	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*

1	0	0	1	0	0
2	0	1	0	1	0
3	1	0	1	0	1
4	1	1	0	1	1
5	1	1	1	1	1
6	1	1	2	1	1
7	1	2	1	2	1
8	2	1	2	1	2
9	2	2	1	2	2
10	2	2	2	2	2
11	2	2	3	2	2
12	2	3	2	3	2
13	3	2	3	2	3
14	3	3	2	3	3
15	3	3	3	3	3

etc.

6

a.	*a.*	*a.*	*x.*	*a.*	*a.*
a.	*x.*	*a.*	*a.*	*x.*	*a.*
a.	*x.*	*a.*	*x.*	*a.*	*x.*
x.	*a.*	*x.*	*x.*	*a.*	*x.*
x.	*x.*	*a.*	*x.*	*x.*	*x.*
x.	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*

1	0	0	0	1	0	0
2	0	1	0	0	1	0
3	0	1	0	1	0	1
4	1	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	2	1	1
8	1	2	1	1	2	1
9	1	2	1	2	1	2
10	2	1	2	2	1	2
11	2	2	1	2	2	2
12	2	2	2	2	2	2
13	2	2	2	3	2	2
14	2	3	2	2	3	2
15	2	3	2	3	2	3
16	3	2	3	3	2	3
17	3	3	2	3	3	3
18	3	3	3	3	3	3

etc.

7

7

	a.	*a.*	*a.*	*x.*	*a.*	*a.*	*a.*
	a.	*x.*	*a.*	*a.*	*a.*	*x.*	*a.*
	a.	*x.*	*a.*	*x.*	*a.*	*x.*	*a.*
	x.	*a.*	*x.*	*a.*	*x.*	*a.*	*x.*
	x.	*a.*	*x.*	*x.*	*x.*	*a.*	*x.*
	x.	*x.*	*x.*	*a.*	*x.*	*x.*	*x*
	x.	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*
1	0	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	0	0	1	0
3	0	1	0	1	0	1	0
4	1	0	1	0	1	0	1
5	1	0	1	1	1	0	1
6	1	1	1	0	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	2	1	1	1
9	1	2	1	1	1	2	1
10	1	2	1	2	1	2	1
11	2	1	2	1	2	1	2
12	2	1	2	2	2	1	2
13	2	2	2	1	2	2	2
14	2	2	2	2	2	2	2
15	2	2	2	3	2	2	2
16	2	3	2	2	2	3	2
17	2	3	2	3	2	3	2
18	3	2	3	2	3	2	3
19	3	2	3	3	3	2	3
20	3	3	3	2	3	3	3
21	3	3	3	3	3	3	3

etc.

10

	a.	*a.*	*a.*	*a.*	*a.*	*x.*	*a.*	*a.*	*a.*	*a.*
	a.	*a.*	*x.*	*a.*	*a.*	*a.*	*a.*	*x.*	*a.*	*a.*
	a.	*x.*	*a.*	*a.*	*a.*	*x.*	*a.*	*a.*	*x*	*a.*
	a.	*x.*	*a.*	*x.*	*a.*	*a.*	*x.*	*a*	*x.*	*a.*
	a.	*x.*	*a.*	*x.*	*a.*	*x.*	*a.*	*x.*	*a.*	*x.*
	x.	*a.*	*x.*	*a.*	*x.*	*x.*	*a.*	*x.*	*a.*	*x.*
	x.	*a.*	*x.*	*x.*	*a.*	*x.*	*x.*	*x.*	*a.*	*x.*
	x.	*x.*	*a.*	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*	*a.*	*x.*	*x.*
	x.	*x*	*x.*	*x.*	*a*	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*
	x.	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
3	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
4	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
5	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
6	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
7	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1
8	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
9	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1
12	1	1	2	1	1	1	1	2	1	1
13	1	2	1	1	1	2	1	1	2	1
14	1	2	1	2	1	1	2	1	2	1
15	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
16	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2
17	2	1	2	2	1	2	2	2	1	2
18	2	2	1	2	2	2	2	1	2	2
19	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2
20	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

etc.

CLASSIS

CLASSIS SECVNDA
CONTINENS
PHYSICA.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE.

ANNI 1740.

AVCTORE:
Georgio Wolffgango Krafft.

§. 1.

Hoc anno 1740 obſeruatae fuerunt a me altitudines Barometri, ſingulis menſibus maximae et minimae, ſequentes, in quibus, vt hucusque factum eſt, numeri ante punctum poſiti denotant partes duodecimas, ſiue pollices, pedis Londinenſis, numeri autem poſt punctum poſiti denotant horum pollicum partes centeſimas.

			maxima		minima		differ.
1740.	Iannuarius	—	30. 08	—	28. 98	—	1. 10
	Februariu	—	30. 12	—	29. 08	—	1. 04
	Martius	—	29. 99	—	28. 91	—	1. 08
	Aprilis	—	29. 79	—	28. 95	—	0. 84
	Maius	—	30. 28	—	29. 30	—	0. 98
	Iunius	—	29. 91	—	29. 40	—	0. 51
	Iulius	—	29. 88	—	29. 28	—	0. 60
	Auguſtus	—	30. 25	—	29. 28	—	0. 97
	September	—	30. 12	—	29. 14	—	0. 98
	October	—	30. 10	—	28. 91	—	1. 19
	Nouember	—	30. 14	—	28. 90	—	1. 24
	December	—	30. 12	—	28. 65	—	1. 47

§. 2. Apparet ex his altitudinibus Barometri, earum maximam hoc anno fuiſſe 30. 28, quae obſeruata fuit die 20 Maii, ſerenitate perfecta aliquot dierum, ſpirante mediocri zephyro, variabili; quia vero haec altitudo maxima illam quae anno 1737 obſeruata fuit, nempe 30. 95, non excedit: haec adhucdum manet omnium hic loci obſeruatarum maxima. Minima autem Barometri altitudo hoc anno fuit 28. 65, quae extitit die 11 Decembris, cum Borea-zephyrus fortis turbulenter niuem per aëra ferret, et nubes continuae aliquot dierum exiſterent, cum frigore mediocri. Quae igitur minima altitudo huius anni, cum inuentam in praecedentibus annis, nempe 28. 18, ſuperat: manet adhuc idem ſpatium variationum Barometricarum antea ſtabilitum, nempe 2. 77. Suntque adhuc variationes menſtruae in primis et vltimis anni menſibus maiores, minores autem praeciſe ſex mediis.

§. 3. Auroras Boreales hoc anno obſeruaui ſequentes:

1740 Iannuarii 12. aderant, in ſerenitate mediocri, veſtigia lucis Borealis, ſtante leniter Euro, perdurante ſerenitate mediocri.

Februarii 19. viſa eſt lux Borea parua, inter nubes; ſtante tenui Auſtro; ſecuta eſt nix.

Martii 12. in ſerenitate perfectiſſima aliquot dierum apparuit lux Borea inſignis, hora 10 nocturna, frigore exiſtente ſatis forti.

13.

13. perdurante adhuc eadem ſerenitate viſa fuit lux Borea debilior, nec non
14. alia, in iisdem circumſtantiis.

Septembris 11. in ſerenitate perfecta apparuit lux Borea, vnico tantum radio conſpicua, quam inſequebatur fortiſſimus zephyrus variabilis, et pluuia.

14. inter nubes viſa ſunt veſtigia lucis Borealis, quam pluuia inſecuta fuit. Eadem hora Londini grauiſſima ſaeuiit tempeſtas, nunciantibus Nouis publicis Amſtelodamenſibus.

15. cum plueret fere toto die, viſa ſunt circa horam 9 nocturnam, in coelo atris nubibus diuiſo, fulgura frequentiſſima, ſine tonitru; et hora 10 aderant indicia apertiſſima lucis Borealis, ex aliquot aſcendentibus virgis, in aëre ſerenitati reſtituto.

Octobris 13. in ſerenitate fere integra, viſa eſt lux Borea parua, cum pluuia inſequente et praecedente.

Nouembris 5. in ſerenitate perfecta, ſed breui durante, viſa eſt lux Borea, conſtans arcu lucido tranquillo, quam coelum nubilum inſecutum eſt.

7. vidi hora 4. matutina veſtigia lucis Boreae, in multa ſerenitate.

§. 4. Prima congelatio facta eſt hoc anno d. 23 Septembris, quo die ſimul aqua, libero aëri expoſita,

 cruſta

cruſta glaciali obducta fuit hora 10½ nocturna. Thermometro Fahrenheitiano, iuxta appenſo, monſtrante gradus 33.

§. 5. Maximum frigus huius anni incidit in diem 24 Decembris, quo hora 7 matutina, Thermometrum Fahrenheitianum, libero aëri expoſitum, ab egregio artifice Amſtelodamenſi *Prins* confectum, deſcendit ad gradus 15 infra 0, flante leni Euro, in ſerenitate perfecta. Frigus praeterea paulo minus acre experti ſumus diebus 14 23. 24. 25. 26 et 27. Ianuarii, 8 et 12 Februarii, 15. 18. 19 20. 21 22. 23 et 31 Decembris; qui omnes dies Thermometrum modo dictum ad gradus 9 et 12 infra 0 adegerunt. In Obſeruatorio autem Imperiali, in aëre nempe magis eleuato, et magis libero, quam is eſt, qui aedes ordinarias circumdat, maximum frigus deprehenſum fuit d. 25 Ianuarii, ad gradus 30 infra 0. In plerisque praeterea dierum allegatorum, frigore intenſo inſignitorum, nebulae, modo denſiores, modo paulum tenuiores, obſeruatae ſunt, prouti ab aliis iam hoc phaenomenon annotatum eſt.

§. 6. Tonitrua hoc anno audita fuerunt diebus ſequentibus: Maii 6. Iunii 28. Iulii 10. Auguſti 2. Septembris 5, quae vltima tempeſtas, inſolita in his terris, procul dubio ventis aduecta fuit. Nam in Nouis publicis referebatur, die praecedente in vico prope *Halam Magdeburgicam* domum fulmine tactam conflagraſſe, et eo die fortis apud nos ſpirabat ventus Auſtro Zephyrus. Accedunt his fulgura frequentiſſima ſine tonitru d. 15. Septembris, circa horam 9 nocturnam, mihi et multis aliis viſa, ſupra iam §. 3. memorata

§. 7.

§. 7. Menſe Auguſto huius anni coepi quantitatem pluuiae et niuium metiri, et hunc in finem eas excipere in vaſe ligneo, quadrato, cuius quodlibet latus tenet 19 poll. pedis Londinenſis. Expoſui hoc aeri libero in Solariis, lateri orientali et occidentali aedium mearum adiunctis, ex quo factum quidem eſt, vt paries aedium proximus, diſtans tamen a vaſe ad pedes 6, pluuiae quandoque aliquid interceperit. Et quia hoc vas quadratum apertum eſt: ſolicite attendi, vt poſt finitam quamcunque pluuiam ſtatim metirer quantitatem eius, aut vero in diuturnis pluuiis ſaepius menſuram repeterem, antequam per euaporationem aliquid auolare potuerit. Menſuram autem niuis et pluuiae inſtitui cylindro ferreo, ſtanno obducto, eius capacitatis, vt quod calculo et experimento ipſo cognoui, 21 tales aqua repleti in vaſe quadrato efficerent altitudinem aquae vnius pollicis Londinenſis. Ex his itaque obtinui ſequentes obſeruationes:

		alt. pluuiae
a 17 Auguſti ad finem menſis		0. 56. poll Lond.
September	- -	2. 24.
October	- -	3. 15.
Nouember	- -	1. 44.
December	- -	1. 80.
	Summa	9. 19.

niuem in vaſe collectam calore temperato in aquam reſolui curaui ita, vt vas linteo obtextum eſſet, ad euitandam euaporationem. In denſitatem quoque aquae ex niue reſoluta ortae inquiſiui, immergendo illi Araeometrum vitreum paruulum, et capiendo menſuram partis cylindri

lindri eius ſuper aquam exſtantis; aquam vero ipſam reduxi ad eundem ſemper calorem, nempe gradus 43 Thermometri Fahrenheitiani, atque ita deprehendi partem exſtantem Araeometri in aqua niuali d. 18 Decembris 180 partium, qualium 2400 efficiunt pedem Lond. d. 26. Decembris vero 181 earundem partium; ſed, in ſimilibus plane circumſtantiis examinando aquam fluuiam Nevae noſtrae, partem Araeometri exſtantem inueni non niſi 171 dictarum partium; vnde profundius in hac ſubmerſum eſt Inſtrumentum, et conſequenter haec illa leuior.

§. 8. Ventos vehementes experti ſumus diebus ſequentibus: Ianuarii 17. 18. 27. Februarii 5. 17. 23. 24. 25. 26. 29. Martii 18. 24. 25. 26. 27. 28. 30. Aprilis 7. 8. 11. 17. 18. 22. 24 30. Maii 3. 5. 13. 15. 18. 34. 25. 31. Iunii 1. 4. 5. 13. 14. 16. 20. 23. 28. Iulii 1. 2. 3. 4. 11. 22. 23. 25. Auguſti 4. 19. 25. 26. 27. 30. 31. Septembris 2. 3. 5. 6. 12. 13. 18. 21. 22. 29. Octobris 12. 13. 20. 29. 30. Nouembris 4. 6. 12. 13. 22. 26. 29. 30. Decembris 1. 2. 11. 18. 19. 20. 29. inter quos procellae fuerunt Febr. 25. Mart 25. 26. Aprilis 8. 22. 24. Maii 18. 24. Iunii 16. Iulii 1. 2. 3. Septembris 5. 12. 13. 22. Octobris 12. 13. Capto experimento ad modum, quem expoſui in *Obſeruationum Meteorologicarum ab anno 1726 vſque in finem anni 1736 factarum comparatione*, *Praelect. II.* §. 10. vidi, ventum fortem aſſerculum ligneum, quadratum, circa latus ſuperius mobilem, eleuaſſe d. 11. Decembris ad 50°, et hinc ventum eum talem habuiſſe celeritatem, qua in vnico minuto ſecundo temporis progreſſus eſt per $39\frac{1}{10}$ pedes Rhenanos.

§. 9.

§. 9. Grandinem experti ſumus die 5. Septembris, ſurente Zephyro et multum variante, impetum ſuum duas horas ante grandinem decidentem aſſumente; 22. et 23 Septembris ſurente iterum Borea-Zephyro; magnitudo prioris grandinis erat vti piſorum campeſtrium, ordinaria quidem, ſed forma granorum ſenſibiliter conica erat, ita vt vertice, et baſe circulari, praedita eſſent.

§. 10. Quotidiana obſeruatione liquet, nubes varias induere figuras: ſed die 13. Iulii huius anni earum ſeriem aliquam plane ſingularem obſeruaui, quae multis ſpectatoribus, praecipue nautis huc adpropinquantibus, admirationi fuit. Erat eo die toto tempore antemeridiano coelum nubibus continuis obductum, flante mediocri Auſtro Zephyro; poſt meridiem vero ventus mutatus eſt in leuiſſimum Borea-Zephyrum, qui ad veſperam plane quieuit, et coelo ſerenitas integra reſtituta, ſi ſolam hanc ſeriem nubium excipias, quae plagam Borealem occupauit, et ab Occidente verſus Orientem leuiter decliuis apparuit, vt ibi paulo maiorem altitudinem ſupra horizontem teneret quam hic. Latitudo huius faſciae nubium erat circiter 10 graduum, et integra ſeries terminata vtrinque lineis fere rectis inter ſe parallelis AB, et CD. Area faſciae vbique repleta erat colore tenui ſubfuſco, qui diſtinctus erat in partes multas valde nigricantes, quas figura accurate oſtendit. Cum enim phaenomenon hoc per aliquot horas duraret, et nubium figura interea immota perſtaret: Curaui ſtatim vt omnis earum aſpectus per duos delineatores Academiae peritos, me praeſente, omni fide delinearetur. Aſpeximus autem hanc nubium formam ab hora veſpertina 11 vſque ad 1 poſt mediam noctem qualis

Tab. XII. fig. 1.

qualis Fig. 1. repraeſentatur, ſed hora 3 matutina diei ſequentis 14 Iulii ea mutata, et multum contracta, apparuit ſub forma, quam commonſtrat Fig. 2.

§. II. In obſeruationibus Meteorologicis anni praecedentis exhibui deſcriptionem Thermometri, quod gradum frigoris, in regione aliqua maximi, obſeruatore etiam abſente, aſſumit, et eum huic poſt aliquod tempus redeunti deinde indicat. Monitus ab eo tempore perquam humaniſſime a Fautore ſui, poſſe idem Inſtrumentum inſeruire quoque examinando gradui caloris, qui obtinet in imo profundi Oceani. Cui ſcopo, vtili ſane, vt inſtrumentum hoc adaptem, ſuadeo vt perficiatur globus vitreus ſatis amplus A, cui annexus ſit tubulus tenuis BCD, qui in latere CD ſacculos vitreos, introrſum in tubum hiantes, ſibi teneat affixos. Repleatur hoc inſtrumentum ſpiritu vini colorato, aut mercurio, aut alio fluido, per methodos cognitos, atque tum, retento aëre naturali in globo A, vtrinque hermetice ſigilletur. Quo facto facile patet futurum eſſe, vt inſtrumentum, hoc modo adornatum, prioris ſit inuerſum, aptum nempe ad retinendum calorem aliquem maximum, dum aër in globo A contentus, et a calore expanſus, liquorem cogit vt aſcendat, atque ſic ſacculorum ſuperiorem aliquem impleat, qui liquoris captam portionem, dum hic poſtea iterum deſcendit, retinet. Sin itaque hoc Inſtrumentum, pondere aliquo grauatum, in imum maris fune demittatur atque per aliquod temporis ſpatium ibi detineatur: retractum illud indicabit quam facillime, an in fundo maris calor maior obtineat quam in eius ſuperficie. Si vero ſuſpicio aliqua naſcatur, fundum maris frigidiorem eſſe quam

quam eius ſuperficies: eodem cum ſucceſſu inſtrumentum prius demittendum erit. Poterit enim in vtroque caſu Thermometrum hoc ea firmitate, et craſſitie vitri, donari, vt a preſſione aquarum, et diſruptione vitri, omnis metus abſit.

§. 12. Seculo ſuperiori agitata iam fuit quaeſtio, ad quam profunditatem gelu terram penetret in regionibus ſeptentrionalibus. Propoſita et commendata ea eſt *Hevelio* ex Anglia, inter diuerſas alias ad frigus pertinentes, quae inſertae ſunt omnes *Diario Eruditorum Gallico* anni 1667, pag 25. Reſpondit ad hanc queſtionem *Heuelius*, ex obſeruatione *Sheſſeri* Proffeſſoris Vpſalienſis eo tempore, terram *Suecia* congelari vſque ad 2 vlnas Suecias. Refertur etiam in Diario citato, ad annum 1675. pag. 138. *Paulum Biornium*, qui in Islandiam peregrinatus eſt, memoriae prodidiſſe, terram ibi ad profunditatem 4 pedum congelari. Operam igitur abhibui vt et hic loci determinem ad quam profunditatem tellus noſtra, pro variis circumſtantiis locorum, congelationem durante hyeme patiatur, atque hinc ſequentes obſeruationes inſtitui, quas, vt hic referam, propoſitum meum omnino requirere videtur, etiamſi fere omnes earum ad obſeruationes Meteorologicas anni ſequentis 1741 referendae eſſent. Itaque anno 1740, d. 14 Martii, ad finem properante hyeme illius anni longe lateque ſaeuiſſima, in hortulo domeſtico, aedibus lapideis et ligneis fere vndique cincto, niuem primo, deinde terram frigore conſtrictam, ſuffodi curaui, atque inueni altitudinem niuis 2 pedum Lonnenſ. humum vero non niſi ad profunditatem ¼ pedis, yel 3 poll. glacie conſtrictam, duriſſima quidem, ita vt

 nihil

nihil eius digitis abradere vel contercre licuerit ; infra hanc cruſtam glacialem autem , quae ſuis limitibus accurate di-dincta erat , terra arenata , qualis ordinarie hic eſſe ſolet, conſueto more digito friabilis offerebatur, quod in ſequentibus quoque obſeruationibus deprehendi. Anno 1741. d. 11. Februarii in horto Botanico Academiae, amplo , et libero aëri maximam partem expoſito, ſed intra vrbem tamen ſito , a Clariſſ. *Ammano* obſeruata fuit altitudo niuis terrae incumbentis $16\frac{2}{3}$ poll. terrae autem glacie conſtrictae tantum $7\frac{1}{2}$ poll. D. 23 Februarii ſubſequente , cum aliquot dies ante Thermometrum Fahrenheitianum vſque ad gradus 15 infra 0 depreſſum fuiſſet , inueni in campo intra vrbem ſito , aedibus quidem lapideis , ſed ad diſtantiam 500 aut 600 paſſuum , et ex parte tantum, cincto , profunditatem niuis 14. poll. et terrae conglaciatae 8. poll. Inſequente d. 4. Martii ſelegi campum liberum , extra vrbem ſitum ad diſtantiam circiter $\frac{1}{4}$ milliaris Germanici, qui arboreto humili ad interuallum vnius Verſtae, vel $\frac{1}{7}$ mill. Germ. ex vno latere munitus eſt , atque ibi deprehendi niuem altam 16 poll. infra hanc cruſtam aquae purae glacie conſtrictae altitudinis $1\frac{1}{2}$ poll. quam terra conglaciata ſequebatur ad profunditatem non niſi 5 poll. campus hic ingruente autumno paulum ſolet eſſe paludinoſus , vnde ſine dubio cruſta glacialis aquea ortum ſub niue duxit. Proximo deinde 17 Martii ſelegi alium campum liberrimum, eodem circiter, qua prius, diſtantia extra vrbem iacentem , in eoque inueni altitudinem niuis 14 poll. cruſtam aquae congelatae altam $\frac{1}{2}$ poll. terram vero glacie conſtrictam ad profunditatem 12 poll.

TEN-

TENTAMEN EXPLICANDI DILATATIONEM ET CONTRACTIONEM PVPILLAE

Auctor

Ioſias Weitbrecht.

1.

Indubitatum eſt phaenomenon, quod pupilla oculi non eiusdem ſemper diametri videatur, ſed maiore luminis claritate illabente minor, minore autem maior appareat. Neque vero hoc ſimpliciter ita apparere, ſed re vera talem pupillae, dilatationem et conſtrictionem actu fieri vnanimiter Phyſiologi ſtatuunt; quem motum reciprocum ope fibrarum muſcularium partim orbicularium partim longitudinalium radii in modum protenſarum, quas in vuea ab Anatomicis collocari ſupponunt, effectui dari arbitrantur.

§. 2. Equidem non negauerim, in planitie iridis a limbo pupillae vsque ad illum locum, ad quem proceſſus ita dicti ciliares terminantur, plurimas fibras candicantes et coruſcantes radiatim diſpoſitas decurrere, itemque alium circulum fibroſum adeſſe, quo ipſe pupillae limbus circumſcribitur. Has fibras autem carneas et muſculoſas eſſe a nemine Anatomicorum hactenus per experientiam ad oculum demonſtratum eſt; etiamſi ſcriptorum aliqui illas tales eſſe vel probabiliter. argumento ab analogia deſumto, dubitanter tamen aſſumſerint, vel et abſque vlla reſtrictione audacter ſtatuerint: quin potius

 tius

tius non modo iam olim Ruyſchius et Houius, qui Viri celeberrimi diligentius circa oculum verſati ſunt, iſtas fibras et circulos maximam partem vaſa eſſe oſtenderunt, ſed Cel. noſter Daverno i ſolidiſſimis diſquiſitionibus ſuis in deſcriptione oculi ceti nuper praelecta euicit, ſuppoſitam illam ſubſtantiam muſculoſam vel carneam ex organorum exiſtentium numero eliminari debere.

§. 3. Cum igitur de fibris iſtis carneis hactenus certo non conſtet; haec tria neceſſario exinde ſequuntur: aut enim illi, qui ſententiam communem amplectuntur, illarum exiſtentiam demonſtratiue ante oculos ponere debent; aut, quia ad motum producendum ſubſtantia fibrae carnea non abſolute requiritur, ſed et alii modi poſſibiles dantur (quis enim in muſca vel pulice carnes et muſculos detexit?) alia organa motricia, quibus idem effectus praeſtatur, exhibere et ſubſtituere oportet; aut denique mutatio pupillae ab iſtarum fibrarum longitudinalium motricium (qualescunque illae denique fuerint) contractione et relaxatione plane non dependet; ſed alius modus excogitari debet, quo eadem pupillae ampliatio praeſtari poteſt.

§. 4. Donec autem Anatomici alterutrum ex duobus primis poſtulatis praeſtiterint: nos tantiſper viam tertiam ingredi tentabimus, et quantum ex oculi ſtructura et refractionis legibus detegere licebit, ſequenti methodo exponemus.

§. 5 Propoſitio I. Iris eſt membrana ſubtiliſſima, ex tunicis duabus fibras longitudinales ac circulares varii coloris ſinu ſuo comprehendentibus conſtans, opaca, planum circuli repraeſentans, intra cauum oculi per ſolam pe-

peripheriam ſuam partibus adiacentibus alligata, reliqua autem ſui parte humori aqueo liberrime innatans.

§. 6. Scholion I. Quemadmodum a Veſalio ad noſtra vsque tempora illi Auctores, qui de oculis et viſione ſcripſere, mirum in modum inter ſe diſcrepant, neque ſinguli per voces iſtas, tunica vuea, ligamentum ciliare, proceſſus ciliares, eandem praeciſe rem deſignent: ita non poſſum hoc loco, quin animaduertam communem errorem dicam an hallucinationem quam omnes propemodum Anatomici committunt, qui tunicam vueam ita deſcribere ſolent, vt eam ſuperficiem, quae colorata eſt, et intuentium oculos illabitur, iridem dicant, poſteriore autem facie proceſſus ita dictos ciliares collocent; qua quidem diuiſione talem lectoribus conceptum ingenerant, ac ſi illa ipſa colorata pars et planities ea, cui proceſſus ciliares inhaerent, vnam communem membranam a tergo concretam et duplicatam conſtituerent, quae tamen compoſitio a naturali harum tunicarum fabrica plane abhorret. Iris enim, qualem (§. 5) definiuimus, ſola ſingularem annulum intermedium membranaceum, antica facie coloratum, facie poſtica autem nulla re alia niſi muco nigro tectum et obfuſcatum humori aqueo innatantem conſtituit. Proceſſus autem ciliares ſeu lamellae illae in humoris vitrei membrana circa cryſtallinam lentem pectinatim diſpoſitae tota latitudine ſua reſpondent ei tunicae vueae parti continuatae, quae ſcleroticae pertinacius agglutinatur, et hoc ipſo loco ſub cinguli albicantis, vulgo ligamentum ciliare dicti, ſpecie apparet; a cuius cinguli tergo adnati proceſſus alium quendam annulum maiorem componunt, qui iridem tanquam concentricam ſinu ſuo comprehendit.

§. 7.

§. 7. Scholion II. Iridem poſſe fluctuare, in humore aqueo vndulare, innatare, et quocunque denique nomine hunc motum inſignire placuerit, nullum eſt dubium. Hoc ex eius ſtructura molli et cohaeſione cum adiacentibus partibus luculenter apparet. Praeterea multum inter Anatomicos celebres de figura et ſitu iridis diſputatum eſt. Alii illam planam alii conuexo concauam poſuerunt; aliis camera humoris aquei poſterior maior viſa fuit, aliis minor. Quae varietas omnis quemadmodum vel a conſtitutione et figura oculi, vel a ſecantium dexteritate, vel a methodo, qua rem aggreſſi ſunt, dependebat: ita exinde conſequitur, fluctuationem et mutationem ſitus iridis neutiquam imaginariam eſſe, ſed actu exiſtere poſſe.

§. 8. Prop, II. Quando iris fluctuat, illa a ſitu ſuo perpendiculari et plano deflectit, et ab humore cryſtallino vel recedit, vel ad eum appropinquat.

§. 9. Prop. III. Pupilla eſt foramen circulare in iride, vt limites ponantur radiis lucis in lentem cryſtallinam incidentibus.

§. 10. Prop. IV. Pupilla dilitari dicitur aut conſtringi, quando diameter foraminis maior aut minor apparet.

§. 11. Prop. V. Quando iris intra humorem aquevm fluctuans ad membranam corneam propius accedit: pupilla neceſſario ampliatur.

Tab. XII. fig. 4. 5. Repraeſentent enim lineae *ac*, *cc* et *cb* (fig. 4.) ſectionem iridis et pupillae mediam *ac*, *bc* (fig 5.); ſint puncta *a* et *b* fixa, quibus peripheria iridis *aeb* (fig. 5.) cum ſclerotica cohaeret; moueantur lineae *ac*, et *cb* (fig. 4.) tanquam radii conſtantes circa centra ſua

a et

a et *b*, et transferantur illae in ſitum *ad* et *bd*: puncta *d* et *d* neceſſario longius a ſe diſtabunt, quam puncta *c* et *c*. Videlicet iris ex ſitu plano transmutabitur in figuram coni truncati. Durante hoc motu, quia nihil eſt, quod fibras longitudinales iridis *ac*, *ec*, *bc* (fig. 4. 5.) extendat, illae eandem menſuram eandemque a punctis *a*, *e*, *b*, diſtantiam ſeruabunt; contra vero fibrae circulares *c*, *c*, et *α*, *ε* (fig. 5.), vtpote debiliores in omnes plagas trahentur, fibrae autem longitudinales angulum inclinationis, quo tamquam radii concentrici conuergebant, mutabunt, et magis parallele decurrent. Iridis igitur planities apparebit ſpatioſior, et pupilla in maiorem amplitudinem expandetur.

§. 12. Problema I. Determinare augmentum amplitudinis pupillae.

Sit AC radius circuli, et latitudo annuli iridis vndulantis; transferatur ille in ſitum DC ad diſtantiam BD, quae eſt longitudo viae, quam punctum *c* (fig. 4. 5.) in limbo pupillae fluctuando conficit; erit AB, ſinus verſus, augmentum radii pupillae. Sit igitur $AC = DC = r$ $BD = a$, $AB = x$; erit ex natura circuli $AB : BD = BD : BE$, $x : a = a : 2r - x$; vnde elicitur valor ipſius $x = r - \sqrt{rr - aa}$. Aſſumamus autem iuxta calculum Cl. Petiti latitudinem annuli iridis $= 2$ lin. longitudinem viae BD, ſiue maximam a ſitu plano diſtantiam $= 1$ lin. et diametrum pupillae in ſitu plano $= 1$ lin; erit $x = 2 - \sqrt{3}$ augmentum radii pupillae, et augmentum totius diametri $2x = 4 - \sqrt{12} = \frac{1}{2}$ lin. cum aliquo exceſſu; vnde diameter pupillae minima in ſitu plano iridis ad ma- Tab. XII. fig. 6.

ximam

ximam in propinquitate corneae erit = 1 : 1 $\frac{1}{2}$ et area pupillae minima ad maximam erit = 1 : 2 $\frac{3}{17}$ quam proxime. Id quod cum experientia egregie conuenit.

§. 13. Suppoſita pupillae fluctuatio aliud praeterea adminiculum viſui affert, quod etiamſi exiguum ſit, non tamen plane negligi debet. Si enim pupilla in eodem ſitu proximo maneret reſpectu humoris cryſtallini, forent areae intra oculum illuminatae in ratione amplitudinum pupillae. Quando autem iris ab humore cryſtallino recedit, per eandem aperturam maior radiorum copia ex
Tab. XII. corpore luminoſo excipitur, et maior area illuminatur.
fig. 7. Sit enim CC diameter pupillae prope humorem cryſtallinum poſitae, et conſequenter area illuminatae = 1 $\frac{1}{2}$ lin. ſit PP eadem diameter pupillae dilatatae, ſed ab humore cryſtallino remotae ad diſtantiam maximam CP = 1 lin. Sint OC, OP, OR radii corporis luminoſi O ad diſtantiam a cornea ſex pollicum, qua plerumque myopes objecta intuentur; erit RR diameter areae per foramen remotum PP illuminatae. Eſt autem OP : OR = PP : RR, 60 lin: 1 $\frac{1}{2}$ lin. = 61 : 1 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{63}$. Ergo diameter RR diametrum CC vna ſaltim ſexageſima parte vnius lineae excedit.

§. 14. Hactenus de fluctuatione iridis et hinc dependente pupillae dilatatione ſimpliciter egimus, nullo reſpectu habito medii aquoſi, cui illa innatat: nunc vero etiam conſiderabimus, qualis mutatio pupillae apparere debeat, dum illa trans humorem aqueum conſpicitur.

§. 14. Prop. VI. Membrana cornea eſt membrana oculi anterior pellucida, radios lucis in oculum transmittens, figurae conuexo-concauae; vna cum humore aqueo, quem circumſcribit et cum iride tamquam cum chorda ſectionem ſphaerae repraeſentans §. 16.

§. 16. Prop. VII. Humor aqueus eſt humor limpidiſſimus, cameras oculi replens, cui iris innatat, et per quem radii lucis in oculum illabentes traiiciuntur.

§. 17. Prop. VIII. Imago igitur iridis conſiderari debet, quatenus ex medio denſiore per medium tenuius, nimirum ex humore aqueo, cui innatat, per aerem ſpectanda nobis obiicitur.

§. 18. Prop. IX. Radii lucis ex medio tenuiore in denſius progredientes inclinantur ad perpendiculum, ex denſiore vero in tenuius, declinantur a perpendiculo. Quapropter etiam iridis imago, dum per humorem aqueum, tunicam corneam et aerem intermedium traiicitur, iisdem refractionis legibus obnoxia eſt.

§. 19. Prop. X. Humor aqueus eiusdem propemodum denſitatis aeſtimatur cum aqua pura.

§. 20. Prop. XI. Sinus anguli incidentiae ad ſinum anguli refractionis eſt in ratione conſtante, et a Phyſicis datur ex aere in aquam, vt 4:3. Aſſumi igitur poteſt ſinus anguli incidentiae iridis ad ſinum anguli refractionis ex humore aqueo in aerem, vt 3:4.

§. 21. Experimentum. Impleatur ſphaera vitrea cava, vel lagena fluido qualicunque pellucido, e. gr. aqua, et immittatur corpus aliquod, e. gr. globus vel annulus vsque in medium ſphaerae: quo longius diſtabit hoc corpus a puncto ſuperficiei ſphaerae, eo maius illud ſpectatori apparebit; quo propius diſtabit, eo minus apparebit.

§. 22. Scholium III. Sufficeret hoc experimentum ad demonſtrandum, quod diameter pupillae maior apparere debeat, quando iris vndulans ad lentem cryſtallinam

accedit; minor autem, quando eadem membranula ad tunicam corneam appropinquat. Conſiderari enim poteſt iris, vt corpus illud intra ſphaeram motum; humor aqueus, vt aqua in ſphaera; cornea vt ſphaerae ſuperficies. Sed quia hoc Propoſitioni V. et VI. directe repugnare videtur, inquiramus paullo ſtrictius in huius variationis modum et quantitatem; menſura enim eruta maiorem certitudinem rei conciliabit, et quantum hypotheſi noſtrae officiat, determinabit.

Tab. XII. fig. 8. §. 23. Problema II. Sit AMNB ſphaera aquea, cuius radius $AC = r$, in eaque circulus opacus, diametri Rr, mobilis, vt ad punctum ſuperficiei A accedere et ab illo recedere queat. Sit oculus ſpectatoris in O. Quaeritur, quo angulo viſiuo orbis Rr in quaque ab A diſtantia oculo O repraeſentetur.

Solutio. Sit MOA dimidius angulus opticus, qui cum ſit vehementer paruus, pono diſtantiam oculi $AO = PO = MO = a$; $PM = x$. Sit porro MT radius incidentiae, reſpondens radio refracto MO, et tangat MT extremitatem circuli opaci in R. Sit $TC = y$, erit $TM = TA = y + r$, et $OC = a + r$. Quia (§. 20.) ſNMC : ſTMC = 4 : 3; erit OC. MT : CT. MO = 4 : 3, vnde $(a+r)(y+r) : ya = 4 : 3$, et $y = \frac{3r(a+r)}{a-3r} = CT$. Sit denique diſtantia circuli a centro ſphaerae $CS = d$, et radius circuli opaci $RS = b$; erit $TS : RS = TP : PM$, $(y+d) : b = (y+r) : x$, et $y = \frac{rb-dx}{x-b}$; ex quibus binis valoribus τȣ y elicitur $x = \frac{4abr}{3r(a+r)+d(a-3r)}$. Eſt igitur angulus opticus quaeſitus reciproce, vt $3r(a+r)+d\,a-3r)$. Ergo quo magis pupilla retrahitur ad lentem cryſtallinam a ſuperficie tunicae corneae, eo maior illa apparet.

§. 24.

§. 24. Scholium IV. Denſitatem tunicae corneae in tota conſideratione tuto neglexinus, partim, quia calculum nimis intricatum reddidiſſet, partim, quia inuentae aeſtimationi vix quicquam diſcriminis attuliſſet.

§ 25. Corollarium I. Aſſumamus iuxta eundem calculum Clar. Petiti radium ſphaerae, cuius cornea portio eſt, $CA, CM = r = 3\frac{3}{4}$. lin; Semidiametrum pupillae $RS = b = \frac{1}{2}$. lin; Longitudinem viae, quam iris fluctuando conficere poteſt, ſiue diſtantiam pupillae a lente cryſtallina, variabilem, maximam $= 1\frac{1}{4}$ lin; diſtantiam minimam $= 0$; conſequenter diſtantiam pupillae CS a centro corneae C maximam $= d = 3\frac{3}{4}$ lin; diſtantiam eandem CS minimam $= d = 2\frac{1}{2}$ lin; diſtantiam oculi ſpectantis $AO = a = 60$ lin: Erit in maxima pupillae a cryſtallina lente diſtantia $x = \frac{452}{900}$, in diſtantia autem minima $x = \frac{452}{843}$. Apparentia igitur pupillae prope lentem maxima ad minimam prope tunicam corneam erit $= 900 : 840 = 15 : 14$. Cum vero latitudinem pupillae circa corneam ſupra (§. 12.) inuenerimus diametri quindecim partium decimarum vnius lineae, cum aliquo exceſſu: exinde patet, hanc diametrum pupillae dilatatae propter refractionem ſemper $\frac{1}{15}$ lineae maiorem iudicari debere, quam oculo intuentis apparet; quae autem differentia adeo exigua eſt, vt oculus ſpectatoris illam diſtinguere nequeat. Effectus igitur refractionis hypotheſi noſtrae neutiquam officit.

§. 26. Coroll. II. Quia durante pupillae dilatatione ſolae fibrae transuerſales et in orbem ductae $\alpha\varepsilon$ ſunt, quae violentam extenſionem patiuntur (§. 11.): ceſſante illa cauſſa, quae iridem protruſit, etiam dilatatio ceſſat; fi-

brae enim iſtae internae elateris ſui virtute iterum reſtituuntur et pupilla anguſtatur.

§. 27. Solutio igitur problematis (§. 1.) eo redacta eſt, vt cauſſam dilatationis pupillae non in contractione fibrarum muſcularium longitudinalium iridis, ſed in protruſione totius iridis corneam verſus, et inde ſequente extenſione fibrarum circularium (§. 11.); anguſtationem vero non in iſtarum relaxatione, ſed in harum naturali reſtitutione (§. 26.) quaeſiuerimus. Vnde nouum problema emergit. Quae eſt cauſſa, quod illabente pauciore lumine iris a lente cryſtallina recedat, et corneam verſus protrudatur? Obiicies forſan, nos hac methodo nihil vel parum profeciſſe, aeque enim difficile eſſe, rationem reddere, quare iris, illabente minore lucis claritate protrudatur, quam ſatisfacere antiquae quaeſtioni: quare poſitis iisdem, fibrae carneae longitudinales contrahantur. At vero, primus ad veritatem greſſus eſt, errorem agnoſcere. Cum nulli tales dentur muſculi: quid igitur in reddenda cauſſa rei, qualis nulla eſt, inutiliter anxii ſumus? De difficultate autem vtriusque problematis inter ſe comparanda nemo iudicare poterit, niſi qui vtramque ſolutionem tentauerit, quod tamen a quopiam Phyſiologo factum eſſe, mihi compertum non eſt. Non loquor de cauſſa finali, ſed phyſica. Dabo ego difficultatis ſpecimen. Motus certe iſtarum fibrarum muſcularium, ſi quae ſunt, plane inuoluntarius eſt. Eius igitur determinatio ex cerebro debet proficiſci. Quid vero eſt illud, quod cerebrum ad hanc determinationem ſollicitat? Si cauſſam in prouidentia mentis quaeſiueris; nodum quidem ſcindes, non ſolues. Sin impreſſionem vel actionem radiorum lucis

cis incidentium, (quod G. Bergerus in Phyſiologia ſua Cap. XXVIII. Pag. 410. verbulo indicaſſe videtur) accuſaueris: ſequitur, quo maior luminis claritas, quo copioſiores radii, eo fortiorem illorum eſſe debere actionem et ſollicitationem. At vero omnia contraria euenire experientia docet; quo debilius enim lumen eſt, eo fortior illarum fibrarum actio, eoque amplior pupillae dilatatio ſequitur. Accipe et alterum. Variante luminis intenſitate obſeruatur variationem pupillae cum notabili aliqua mora procedere; non vero in inſtanti vel eo ipſo momento, quo lumen augetur vel minuitur, quod tamen ita fieri deberet, ſi dilatatio eius a contractione fibrarum muſcularium dependeret. Sed ne alteram quaeſtionem omnino intactam relinquam, aliqualem illius explicationem paucis tentabo. Iris protruditur corneam verſus, quando poſterior camera ampliatur pro maiore humoris aquei quantitate recipienda; retrocedit autem illa, quando ex eadem camera anguſtata humor aqueus in anteriorem expellitur. Certum eſt, radios lucis in cauum oculi illabentes effectum aliquem exerere in illius humores et tunicas. Concede igitur mihi, per copioſiores radios humorem vitreum vel rarefieri, vel in poſteriore ſede bulbi comprimi, et vna cum lente cryſtallina anteriora verſus propelli: in vtroque caſu camera poſterior anguſtior euadet, humor aqueus in cameram anteriorem penetrabit, et iridem lenti apprimet. Remittant autem radii; ceſſabit etiam humoris vitrei vel rarefactio vel compreſſio; contrahetur igitur et retrocedet cum lente in ſedem priſtinam, camera poſterior ampliabitur,

et

et humor aqueus illas dilabens iridem corneam verſus protrudet, vnde pupilla dilatabitur. Dixi, aliqualem explicationem me tentaturum, vt pote nondum ſatis digeſtam. Hanc enim pro abſolute vera venditare nolim, neque etiam vlli ſententiam meam obtrudam, aut occaſionem praeſcindam, qui forte in reuelandis cauſſis oculatior me fuerit.

DE

DE GLANDVLIS RENALIBVS EVSTACHII.

Auctore
I. G. du Vernoi.

Saepe a. 1739. admonui, certas particulas, renum ſuccenturiatorum hiſtoriam ſpectantes, crebris diſſectionibus mihi compertas, et nunc poſt earum deſcriptionem, eas pingendi ſpem et voluntatem eſſe: Poſt hac vero iconum cauſſa, res iſtae quantumlibet deſcriptae, fere obliuioni traditae, et ob ſpem ipſos renes ſuccenturiatos ſimul pingendi, in longinquum tempus dilatae ſunt: Quos renes, vt apud Anatomicos hactenus depicti ſunt, quoties diligentius perluſtrare mihi contigit, ego haud ſatis mirari potui, cur quanto liberalius, et redundantius et tanta diligentia reliquae partes C. H. ſunt depictae, tanto parcius icones illorum renum peruulgatae, et vt vera fateamur, rudiore et indiligentiore artificio, quam in re tanti momenti decebat, confectae fuerint: Quae cum ita ſint, quid quaeſo, ad hiſtoriae anatomicae complementum, magis optandum eſt, quam ſtudio, labore, et induſtria, quibus reliquarum partium C. H. Sic illorum renum icones excultas eſſe, quibus iuxta naturae exemplar, omnia quae tam exterius quam interius., circa eorumdem admirandam ſtructuram, a Diuino Opifice conſtituta ſunt, qua fieri poteſt perſpicuitate, fide, et ſolertia, exponantur, qua in re, opinor, haud leuior, vt nonnullis videtur, diligentia, quam circa quamcunque aliam partem C. H. deſideratur.

 Sic

Sic itaque cum ingenti ſpe conatus fuiſſem, dimenſionibus, amplitudine, ſitu, connexionibus, et forma, qua vterque ren ſuccenturiatus ſpectatur, pictura exprimere, cum omnis generis vaſis apud Anatomicos hactenus deſcriptsu. His autem haud contentus, anniſus fuiſſem, circulim quendam admirabilem delineare, quem vaſcula exilia hactenus, vt opinor, minus deſcripta, incredibili copia efformare, in vtriusque ſexus cadaueribus, ſaepius comperi, et aliis oſtendi: nempe ſecta tam anterius quam poſterius tunica adipoſa illos renes inuoluente, et detracta, e toto eius interiore ambitu, vaſcula tenuiſſima fibras longitudinales repraeſentantia renum exteriori circumferentiae annexa, vtque per proceſſus ciliares, cryſtallinus et vuea, ſic per iam memorata vaſcula radiatim diſpoſita, membranam adipoſam et renes ſuccenturiatos, a Diuino Opifice coniuncta eſſe animaduerti: Quae vaſcula, quantum ego aſſequi poſſum, haud in vnum truncum communem coeunt, verum per ſingula et diſtincta orificia, renem vndiquaque ingreſſa, ſanguinem vt vaſculorum color rubicundus indicat, ad vſum hactenus minus cognitum, in eius cauitatem deuehunt. Iuxta circulum vaſcularem, conatus fuiſſem formam exteriorem, frequentiam, et nexum cum illis renibus 1. lymphaeductuum 2. fibrarum neruearum 3. exilium his interiectorum nodulorum ſeu tumorum gangliformium perſpicuis et accuratis iconibus illuſtrare.

Ab exteriore habitu poſtea, ego operam haud ſecus contuliſſem in peculiares icones, quae videlicet artificium quod a Diuino Opifice interius conſtitutum eſt, praeclare exhiberent. Nempe 1. Venae illos renes permeantes

meantes haud ſolidis et imperuiis, vt extra renem, membranis conſtructae, verum vndiquaque ſic peruiae et perforatae ſunt, vt per tunicarum interſtitia haud ſecus quam per directum canalis, via conſtituta ſit. Si nunc creberrima foramina, vt res fortuita, et vt effectus dilacerationis vaſculorum lateralium, a nonnullis credi vellent, ipſa opinor conformatio foraminum, quae omni ex parte in modum cribri ſunt diſpoſita, et, quod hinc conſequitur, ſubita renis intumeſcentia, quae ante ſectionem per venae inflationem efficitur, omnem ea de re dubitationem adimunt: Quam conformationem peculiarem venarum, cuius in C. H. duplex exemplum duntaxat videlicet in liene, virorum organis genitalibus, mihi hactenus cognitum eſt, ego propterea tanto magis ſum miratus, quod illis renibus, *ſi glandulae eſſent*, vt communis opinio eſt, tum vt in venis glandularum ſimilis ſtructura a Diuino Opifice tributa fuiſſet: quae venarum perforationes in glandulis, quantum ſcio, a nemine hactenus obſeruatae ſunt.

Mihi, vt CASPARO BARTHOLINO primum, et nonnullis Anatomicis contigit, ſemper quidem cauitas aliqua, et vt non raro accidit, per compreſſionem effluxus cruenta, vel aliqua per flatum expanſio ſpectata ſunt, verum tamen, num illa cauitas, vt per ſectionem conſpicua eſt, ſic a natura conſtructa? vtrum ſolitaria et ſimplex? an vero multiplex et compoſita ſit? iure meritoque dubitandum eſt, poſtquam neque partim ab EVSTACHIO primo illorum renum inuentore, ipſa cauitas eiusque conſtitutio minus deſcripta fuerit, partim circa eandem recentiores deſcriptiones parum ſibi conſtent,

 aliae

aliae apud adultos in dubium reuocent ; aliae ductus ampli et tali nomine deſignent , aliae in extremitate maiore eius ſedem conſtituant , aliae fraena tranſuerſa , aliae valuulas ſatis inſignes , aliae duntaxaat filamenta parietes inuicem nectentia, adiiciant : dum ipſe , praeter illas rationes dubitandi , exteriorem ſuperficiem vidi haud ſemper aequalem et complanatam , verum nonnullis protuberantiis praeditam eſſe : a quo tempore , renes forte e multiplici cauitate conſtructos eſſe , coniicere coepi itaque ſic diſſecando mihi obſeruare contigit. Si circa renis ſuccenturiati circumferentiam , ope ſtyli tenuioris leuiter impulſi , perforatio inſtituitur , tum tactu indice , interſtitium aliquod vacuum occurrit , cui ſuccedit poſtea difficultas vlterius penetrandi , quando ſtylus centrum verſus dirigitur : contra ſi dextrorſum aut ſiniſtrorſum conuertitur , nulla difficultas amplius obſtare videtur. Illud iam interſtitium , vt incidendo comperi , regione conuexa ſeu extrema renis , eſt excauatum , forma peculiaris canalis arcuati qui vt extrorſum cortice clauditur , ſic oppoſita nempe interiore parte , per laminam aequalis latitudinis et longitudinis , coloris purpuraſcentis , verum cortice tenuiorem et molliorem , ad modum interſepti clauſus , proptereaque canalis peculiaris , potius quam Venae ampliatae , ſtructura praeditus eſt : Iſtud enim minus a Venae ſtructura abhorret , quod eius interiora crebris minimarum venarum ramificationibus inſtructa ſunt , quarum ſimiles , in caeteris mox deſcribendis maeandris ſeu caueis a me pariter obſeruatae ſunt. Pone illam laminam multiplices aliae laminae , et inter has diſtinctae cavitates eiusdem formae ſpectantur , quae iuxta plicae ſeu

monti-

monticuli latus vtrumque poſitae ſunt: quinimo hic circularis et paulo amplior cauitas ſpectatur, de qua vero iam Anatomicis conſtare ſupra indicatum eſt. Caeterum inter ſingulas caueas, oſtia ſeu viae peculiares ex vna in aliam a Diuino Opifice conſtitutae ſunt: quae oſtia tam circa medium, quam circa extremum cauearum conſpicua, fere earumdem diametro aequalia videntur. Nullae hic valuulae, verum duntaxat rugae leuiores intra iſtiusmodi oſtia ſpectantur.

Vt nunc promiſſis vtcunque ſatisfaciam, quoniam incertum eſt quanta mora iconibus adhuc opus ſit, ante omnia ego pollicitus eram certum inuentum, quod iure meritoque, vt pars eſſentialis hiſtoriae Renum ſuccenturiatorum, agnoſcendum eſt, videlicet, quod certa et peculiaria corpuſcula, vtrique reni ſuccenturiato interiecta, ac vt multiplici obſeruatione, ſic haud minore diligentia et ſtudio a me explorata, de quibus mox verba faciam, quod inquam in C. H. ad renem ſuccenturiatum dextrum ſiniſtrumue, quem nunc proceriorem vel ſi mauis craſſiorem appellabo, nonnulli ſed minimi ſuccenturiati a Diuino Opifice conſtituti ſint, quos propterea Embryones vocabo. Cum praememoratis, et cum certis aliis partibus, iam olim ſummorum Virorum diligentia obſeruatis et deſcriptis, ego comparationem inſtitui poſſe, a primo conieci: Nam ſic an. 1637. 2K. Ianuarii IOANNES VESLINGIVS *in cadauere foeminino, praeter communem naturae ſtructuram, vt a Ioanne Rhodio narratur, publice praeſentabat renem dextrum cui adnatus erat ren alter exilis*: et ſyntagm. Anat. paulo diſertius. *Plures minoresque glandulas venis et arteriis ſuis inſtructas*

renalium aemulas, *circa renum vaſa quandoque naturam diſponere* affirmat. Poſt ſexennium abhinc a THOMA BARTHOLINO in cadauere muliebri an 1643. Patauii diſſecto capſulae atrabilariae quatuor viſae ſunt. *Hiſt, anat. rar. cent* 2. *Hiſt.. LXXVII. an.* 1650. 27. *Ianuarii ſub Annio Molinetto in muliere renes ſuccenturiati parte ſiniſtra ſuere duplices*, *ſupra et infra*, vid. Ioannis Rhodii Mantiſſa Anat. Obſ. XXXVI.

Haec omnia vt dixi eorumque ſimilia exempla a primo quidem credi poſſent, nihil a noſtris obſeruationibus diſcrepare; verum vtinam circa interiorem naturam partium nos ita adiuuare poſſent, vt clara, firma, et indubitata ratione et ſine erroris periculo iisdem fidere poſſemus? Certe mirandum eſt, quum interioris ſtructurae deſcriptio hic omiſſa fuerit, ſic praepropere de renum ſuccenturiatorum numero conſtitui poſſe: Quid enim rei ſpectatorem aliquando fuiſſe, eamque extus duntaxat perluſtraſſe iuuat? Vel ſi intimior cognitio haud neceſſaria eſt, quid diſſectionibus? quid perueſtigationibus Anatomicis? quid diligentia, induſtria et ſagacitate, ad conſtitutionem veram partium, quantum fieri poteſt, illuſtrandam opus eſt? Et ſic vt nulla diſſectione, iſta vna duntaxat fortuita obſeruatione, Veslingii, Molinetti, Bartholini doctrina de renum ſuccenturiatorum numero ſubnixa eſt: quinimo, a Bartholino, ſi quis fuerit renum ſuccenturiatorum, diligentiſſimo perſcrutatore, initio ſupramemoratae obſeruationis ſequentia verba praemiſſa fuere. *Valde in mulieribus ludit natura illarumque partibus generationi dicatis. In cadauere Muliebri Patauii an.* 1653 *diſſecto raram omnino Renum et capſularum Atrabiliarium ſtru-*

ſtructuram obſeruauimus, quae omnia opinor, in re tanti momenti vt ſunt renes ſuccenturiati, minime ſatisfaciunt.

Quoties ipſe in plurimis cadaueribus quaeſiui, toties tam a principio quam poſtea, corpuſcula illa peculiaria a me inuenta ſunt, vt omnes quibus ea demonſtraui, ſine vlla dubitatione faſſi ſunt; verum circa ſedem et magnitudinem a laudatis viris deſcriptam, hactenus noſtrae obſeruationes penitus repugnant: Ita enim parua ſunt et minuta, vt vel grano piperis vix maiora vnquam videre mihi contigit.

Nomen impoſui Renum ſuccenturiatorum, vero ſic cogente, ſecus quam ipſe a primo imaginatus fui. Quid ſimilitudinis quaeſo inter renes ſuccenturiatos et iſtius modi corpuscula! Nam fortaſſe aliqua communicatio hic poſita eſt? Num facie externa, nempe forma, colore, conſiſtentia, proportione, et peculiari habitus ſimilitudine conueniunt? Mihi vt verum fatear, iſtiusmodi ſimilitudines nullae hactenus perspectae ſunt: quinimo quicquid ego extra in praememoratis corpusculis obſeruare potui, longe aliter quam in renibus ſuccenturiatis, a natura diſpoſitum eſſe cognoui. Colorem itaque albicantem, ſubflauum, ac pinguem et laxiorem ſubſtantiam, ſuccenturiatorum ſimilem haud obtinent, verum ſimili ac in veris Renibus conſtitutione colore et ſubſtantia, extra praedita ſunt. Eorum ſuperficies haud plana et depreſſa vt placenta, ſed vtrinque conuexa et lenticularis. A renum vtroque genere diſcrepant, partim peculiari tametſi varia figura, nempe aliquando circulari vt piſum, aliquando etiam elliptica et vtroque extremo acuminata vt ſemen lini: partim numero renum ſuccenturiato-

turiatorum interdum aequali, interdum auctiore ternario enim numero vno latere ſemel inueni. Cum ſede a Veſlingio, Molinetto, et Bartholino, deſcripta et delineata, eo diſcrepant, quod haud infra vaſa emulgentia, verum parte poſtica renis ſuccenturiati, modo ad eiusdem limbum ſuperiorem, modo circa medium, modo circa baſin, tam dextro quam laeuo latere, naturalis ſedes conſtituta fuerit. *Mihi* bis duntaxat in parte antica abdomen reſpiciente obſeruaſſe contigit. Quae tametſi communi adipoſa membrana renem ſuccenturiatum inueſtiente incluſa, et a primo nexus et communicationis haud expertia eſſe videantur, ego in duobus duntaxat cadaueribus nexum manifeſto perſpexi: quinimo, reni ſuccenturiato ſic accreta et agglutinata offendi, vt in continuam ambo concreuiſſe crediderim: Attamen in reliquis ſemper diſiuncta eſſe animaduerti: quae omnia, haud ſecus quam fibrarum nerueareum, et diuerſi generis vaſculorum circa eadem corpuſcula concurſus et connexiones vltro conſpici poſſunt, quoties membranam adipoſam ſoli expoſitam et digitis leuiter diſtractam diligentius perluſtrare contingit.

Ex his quae hactenus dicta ſunt, haud ſecus quam paruitate eorumdem corpuſculorum, credi iam poſſet, longe a ſuccenturiatis renibus ea diſcrepare, et rectius glandularum lymphaticarum nomine appellanda eſſe: Qua enim veri ſpecie dici poteſt, a Diuino Opifice ſingulis hominibus quaternum et aliquando ſenarium numerum renum ſuccenturiatorum tamque inaequalis magnitudinis, nempe alios ob paruitatem vix conſpicuos tributos fuiſſe? quanto veri ſimilius eſt illam molis diſparitatem glandulis

dulis peculiarem eſſe, vt Anatomicorum communis ſententia eſt: quae dubitationes propterea in animum inducere poſſent, nomen renum ſuccenturiatorum prae memoratis corpuſculis falſo impoſitum fuiſſe.

Quae quum ita ſint, de nominis vera origine, quantum me measque obſeruationes de interiore natura et conſtitutione attinet, ſic habendum eſt. Extra inueſtiente ſed pellucida, ante omnia corpuſcula liberare neceſſe eſt, quae tum ſpectata, cum ſubſtantia renum ſuccenturiatorum, ſi duntaxat quantitatem ſeu molem demas, haud elegantius conuenire poſſe videntur, quando nempe tam particularum componentium, quam coloris et ſuperficiei ſimilitudo praeclare ſpectatur. Si eaedem particulae intus ſpectatae, viciſſim conferantur, tum in complementum ſimilitudinis, a Diuino Opifice verae capſulae hic conſtructae manifeſto apparent: Nam vbi prior ſubſtantia intus terminatur, ei continuo, per vniuerſam circumferentiam, paries peculiaris, ſeu ſubſtantia pulpoſa atro-purpurea ſuperſtructa eſt, cui cauitas ſuccedit in nonnullis circularis, in aliis oblonga, liquore atro-purpuraſcente infecta, quae corpuſculorum magnitudini proportionata eſt. Si praeterea adiicimus, corpuſcula indiſſolubili nexu aliquando renibus ſuccenturiatis agglutinata, et perfecte vnita eſſe, vt duplex exemplum perſpicere mihi contigit, tum res tanto clarius conſtituitur: Sicque fateri cogimur, in C. H. a Diuino Opifice multiplices renes ſuccenturiatos conſtitutos fuiſſe, nempe proceriores illos ab Euſtachio, et reliquis Anatomicis hactenus deſcriptos: et minores, eorum haud abſimiles, quos ego, quum a nemine, quantum ſcio, ante me peruulgati ſint, prima

nunc vice, vt diu pollicitus eram, ad hiſtoriae renum ſuccenturiatorum complementum deſcribere conatus ſui. Haec omnia exhibentur ſequenti diario, vbi obſeruationes duntaxat ſolutiores annotaui.

Anno 1739 d. 9. Maii, in vxore D. Forret, ingenti tumore vtriusque ouarii laborante, circa renes ſuccenturiatos ſic obſeruatum eſt. In tranſitu venae atrabilariae ad venam cavam, haud procul a rene ſuccenturiato dextro eiusdemque margine ſuperiore, exiguum corpusculum rotundum, plexui nerueo vicinum ſpectare contigit, ſtructuram interiorem, cum rene ſuccenturiato omni ex parte conueniens.

Nota 1. Eiusdem renis ſuccenturiati margini inferiori, aliud ſuperſtructum erat haud abſimile corpusculum inſtar appendicis.

Nota 2. Partem eiusdem renis ſuccenturiati coſtis ſpectantem ſeu exteriorem, vidi cum interiore ſubſtantia veri renis non ſolum per peculiaria vaſa ſanguinea nexum habere, verum aliqua ſui parte ſic vnitam eſſe vt hi duo renes ex continua ſubſtantia formati viderentur.

A. 1739. d. 14. Maii, in maſculino cadauere repente extincto, corpuscula haud abſimilia, vtroque latere, vltro ſpectare contigit, vnum piſi magnitudine in dextro, in ſiniſtro latere duplex, ſed minus.

A. 1739 d. 11. Iunii, in cadauere viri laqueo interfecti, duplex corpusculum extrorſum poſitum erat, vnum ſeminis lini magnitudine et figura, alterum inſtar piſi rotundum. Sedes prioris in medio faciei anticae ad venae atrabilariae exortum, poſterioris circa baſin conſtituta erat.

A. 1739 d. 2. Iul. in duobus cadaueribus maſculinis, ſiniſtrorſum duo corpuscula exigua, miliaria, iuxta ſe in vicem poſita ſpectare mihi contigit, in vno ſubiecto parte poſtica, apud alterum ad limbum ſuperiorem ſiniſtri renis ſuccenturiati. Dextrorſum, vnum duntaxat ſed minus, parte antica renis ſuccenturiati dextri deliteſcebat.

Nota ſuperficiem tam anteriorem quam poſteriorem eiusdem renis ſuccenturiati dextri, incredibilem copiam lymphaeductuum vltro ſpectare contigit.

An. 1740 d. 18. Aprilis in Maſculino cadauere, ſub membrana adipoſa renis ſuccenturiati ſiniſtri, corpusculum animaduerti minimum, granum ſinapi aequans. Aliud corpuſculum granum raphani aequans parua abhinc diſtantia, eidem membrana adipoſa agglutinatum conſpexi.

Haud abſimili corpuſculo, ipſam ſuperficiem anticam renis ſuccenturiati ſiniſtri obſeſſam fuiſſe, pariter animaduerti. quod corpuſculum, peculiari et diſtincta cavitate praeditum erat.

*D*extrorſum, ad renis ſuccenturiati dextri extremitatem ſuperiorem, corpuſculum granum raphani adaequans obſeruaui.

Nota 1. diſſecando comperi ſingula corpuſcula, ſinu ſeu cauitate praedita, et ſanguine intus tincta fuiſſe.

Nota 2. Renem ſuccenturiatum copia ſanguinis fluidi diſtentum, dextrum contra vacuum fuiſſe obſeruaui.

Caeterum, donec diligentia, et labore aliorum, obſeruationum noſtrarum veritas cognita et omni ex parte confirmata fuerit, nunc certe periculoſum eſſe crediderim, quidquam de renum ſuccenturiatorum in C. H. vti-

 litatibus

litatibus praepropere determinare velle; vt ea de re variae ſententiae hactenus excogitatae, et in lucem editae fuerunt, quarum hae duae praecipuae ſunt, nempe renes ſuccenturiatos haud ſecus quam nonnullas partes in C. H. ad foetus peculiarem et priuatum vſum conſtructos fuiſſe, hos quae poſt partum, et toto vitae decurſu decreſcere et impotentes fieri. 2. Certo ductu excretorio renes ſuccenturiatos praeditos eſſe. Fateor, inter foetuum et adultorum renes ſuccenturiatos aliquam differentiam occurrere, verum, vt mihi nunc videtur, tam parua differentia eſt, ſi cum iſtius modi partibus quarum praecipuus vſus in foetu perſpectus eſt, earumdemque ſtructura conferamus, vt haud maiore iure, hic attendi poſſe videatur, quam iſtiusmodi diſcrimina, quae ante et poſtquam homo in lucem editus eſt, circa caeteras partes obſeruantur. Praeterea iure meritoque res hic adnotanda eſt, quam in ſupramemoratis perueſtigationibus circa multiplices renis ſuccenturiatos animaduertiſſe mihi contigit, nempe maiores et minores renes ſuccenturiatos inter ſe minime conuenire, et quidem iuxta ſupramemoratam doctrinam deberent: Maiores enim qui ante partum tumidiores obſeruantur, nunc vt placenta ſimiles depreſſiores et irregulari figura apud adultos ſunt praediti: In minoribus contra nullum decrementum perſpicere potui, ſed aequales et inuariabiles permanſiſſe mihi viſi ſunt. Quae cum ita ſint, certi vel illa impotentia renum ſuccenturiatorum poſt partum imaginaria eſt, vel maiores duntaxat renes impotentes fieri, minores contra toto vitae decurſu vi et facultate actionem exercendi praeditos eſſe prodendum eſt: quam doctrinam profecto in animum

mum inducere perdifficile eſt. Et hic fere de poſterioris ſententiae veritate, nempe de renum ſuccenturiatorum certo ductu excretorio, vt nonnulli exiſtimant, noſtrae obſeruationes nos dubitare cogunt, ſi ſequentia attentius ad animum revocantur, nempe eorumdem peculiaris ſtructura, numerus, varia magnitudo, incerta figura, quinimo ſitus inconſtantia inter maiores et minores, quos ſemel coniunctos vidi, intercedit. Igitur exſpectandum eſt, quidnam animaduerſione dignum, poſt illas obſeruationes, tam circa minores renes ſuccenturiatos a me deſcriptos, quam circa maiores occurrere poterit.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE INSTITVTAE PETROPOLI An. 1741.

Auctore

G. W. Krafft.

§. 1.

Durante hoc anno 1741 obſeruatae fuerunt a me altudines Barometri ſimplicis, et hucuſque ad hos vſus vocati, ſingulis menſibus maximae et minimae, ſequentes, in quibus, vti hucuſque ſolitus ſum, numeris ante punctum poſitis denoto partes duodecimales, ſiue pollices, pedis Londinenſis: numeris autem poſt punctum poſitis deſigno horum pollicum partes centeſimas.

		maxima.	minima.	diff.
1741.	Ianuarius - -	30. 37 - -	28. 87 - -	1. 50
	Februarius - -	30. 48 - -	29. 30 - -	1. 18
	Martius - -	30. 59 - -	29. 32 - -	1. 27
	Aprilis - -	29. 93 - -	28. 99 - -	0. 94
	Maius - -	30. 12 - -	29. 25 - -	0. 87
	Iunius - -	30. 04 - -	29. 17 - -	0. 87
	Iulius - -	30. 08 - -	29 23 - -	0. 85
	Auguſtus - -	30. 25 - -	29. 44 - -	0. 81
	September - -	30. 20 - -	29. 98 - -	1. 22
	October - -	30. 60 - -	29. 12 - -	1. 48
	Nouember - -	30. 10 - -	28 63 - -	1. 47
	December - -	30. 73 - -	28. 64 - -	2 09

§. 2.

§. 2. Apparet ex his altitudinibus Barometri, earum maximam hoc anno fuiſſe 30. 73, quae obſeruata fuit die 5. Decembris, circa meridiem, in ſerenitate perfecta illius ſolius diei inter praecedentem et inſequentem, ſpirante nullo vento ſenſibili, ſed frigore regnante praeduro, ad 12. gradus nempe infra o Thermometri Fahrenheitiani. Quia autem haec altitudo maxima illam, quae anno 1737 obſeruata fuit 30. 95, non excedit: haec etiamnum manet omnium hic loci obſeruatarum maxima. Minima Barometri altitudo hoc anno fuit 28. 63, quae obſeruata fuit die 30. Nouembris, tempore nubilo, cadente modica niue. flante forti Borea-Zephiro, et frigore mediocritatem tenente. Quae igitur minima altitudo huius anni, cum inuentam in praecedentibus annis, 28. 18, ſuperet: manet adhuc idem ſpatium variationum Barometricarum antea ſtabilitum, nimirum 2. 77. Suntque etiam adhuc variationes menſtruae in primis et vltimis anni menſibus maiores, minores autem mediis.

§. 8 Auroras Boreales hoc anno obſeruaui ſequentes:

1741.	Ianuarii	10.	Lux Borea, multis virgis pallidis, verticem vſque aſcendentibus, atque etiam arcu lucido, conſpicua, durans vſque ad horam ſextam matutinam diei ſequentis.
		15.	Lux Borea irregularis, haud diu durans.
		16.	Lux Borea debilis.
	Februari	3.	Lux Borea ordinaria.
		4.	Lux Borea nubeculis permixta.
		5.	Lux Borea humilis et quieta.

	23.	Lux Borea nubibus permixta.
Martii	1.	Lux Borea alta et tranquilla.
	26.	Lux Borea tranquilla.
Aprilis	1.	Veſtigia Lucis Boreae diſtincta.
	5.	Lux Borea ſine arcu, ex variis nubeculis lucidis, agitatis, conſtans
	7.	Lux Borea humilis et quieta.
Auguſti	29.	Lux Borea multis virgis, in latus et ſurſum motis, conſpicua, abiens tandem in arcum amplum, ſubobſcurum.
	30.	Lux Borea ſimilis heſternae.
Septembris	4.	Lux Borea tranquilla.
	7.	Lux Borea inter nubes.
	8.	Lux Borea debilis.
	28.	Lux Borea radiis copioſis, vſque ad verticem extenſis, ludens.
	29.	Lux Borea humilis, quieta.
Octombris	1.	Lux Borea nubibus permixta.
	17.	Lux Borea priori ſimilis.
Nouembris	1.	Lux Borea inter nubes conſpicua.
	3.	Lux Borea tranquilla.
	23.	Lux Borea humilis et tranquilla.
	27.	Lux Borea priori ſimilis.
Decembris	10.	Lux Borea variis coloribus picta.
	23.	Lux Borea tranquilla.

Quibus addo, die 16 Februarii apparuiſſe in coelo, caetera maxime ſereno, nubes tenues, albicantes, et ſere in ſpeciem Lucis Boreae formatas, ſine radiis tamen aſſurgentibus, et omni motu deſtitutas.

§. 4.

§ 4. Prima congelatio facta eſt hoc anno die 16. Septembris, eaque vniuerſalis, et durans ad horam 9am matutinam vſque, quo die ſerenitas perfecta erat.

§ 5. Maximum frigus huius anni incidit in diem 28 Decembris, quo in ſerenitate perfecta, hora 8ua matutina Thermometrum Fahrenheitianum deſcendit ad 16. gradus infra o, ſpirante leni Borea, et Inſtrumento locato in aëre libero, prope parietem aedium mearum. Frigus paeterea paullo minus acre experti ſumus hoc anno diebus Ianuarii 1. 2. 3 8. 9. 16. 17. 23. 24. 29. Februarii 18. 19. 20. Nouembris 25. Decembris 5. 23. 24. 25. 26. 27. 29. 30. 31. qui omnes dies Thermometrum modo dictum ad minimum in gradu o depreſſum tenuerunt. Nocte inter 18. et 19. Februarii intercedente ad minimum ſingulis horae quadrantibus vnum ipſe audivi ſonitum trabium, aedibus caetera lapideis, inſtructarum a frigore crepantium, ad modum ſclopeti exploſi. Menſe etiam Auguſto, eiuſque die 21. glacies ſatis denſa ab hortulanis fide dignis obſeruata fuit, ſummo mane. Calorem aeſtati debitum non ſenſimus niſi poſt 18. Iunii; et eiusdem menſis die 21 Thermometrum Fahrenheitianum libero ſoli expoſitum hora 3 poſt meridiem oſtendit gradus 100, quandoque etiam 103; ſole vero paullum nubibus obtecto ſtatim per 5 aut plures gradus deſcendit.

§. 6. Vt autem gradus frigoris atque caloris aëris liberi per totum annum hunc eo melius pateſcant, adſcribam eos, quales obſeruaui in Thermometro a Cl. *De-lisle* hic loci introducto. Dabant gitur menſes huius anni.

		maximum	-- Frigus -	minimum		diff.
1741.	Ianuarius - -	182. 0	- -	148. 8	- -	33. 2
	Februarius - -	187. 0	- -	146. 6	- -	40. 4
	Martius - -	169. 5	- -	143. 0	- -	26. 5
	Aprilis - -	156. 0	- -	127. 5	- -	28. 5
	Maius - -	145. 0	- -	115. 0	- -	30. 0
	Iunius - -	138. 0	- -	112. 5	- -	25. 5
	Iulius - -	134. 0	- -	113. 5	- -	20. 5
	Auguſtus - -	136. 0	- -	122. 0	- -	14. 0
	September - .	155. 0	- -	112. 0	- -	43. 0
	October - -	154. 0	- -	134. 5	- -	19. 5
	Nouember - -	177. 3	- -	141. 0	-	36. 3
	December - -	188. 9	- -	151. 3	- -	37 ·6

Quae interualla menſtrua caloris et frigoris, menſibus hybernis maiora, aeſtiuis autem minora, an conſtitutioni valetudinis hominum aliquid tribuant, morbisque epidemicis excitandis modo magis, modo minus, faueant: Medicorum cura et Obſeruationibus non indignum puto

§. 7. Tonitrua hoc anno audita fuerunt Maii 6. 14. 25. Iunii 11. Iulii 16. 23. Accedunt his fulgura frequentiſſima, ſine tonitru, teſtibus fide dignis viſa d. 31. Decembris, circa horam 11. nocturnam.

§. 8. Qua ratione quantitatem pluuiae et niuium obſeruauerim expoſui in *Obſeruationibus Meteorologicis an.* 1740. § 7. Cum vero menſe Septembri huius anni forma aedium mearum mutata fuiſſet, ita vt negotio huic inſeruire amplius plane non poſſet: recepit in ſe hanc operam Cl. Profeſſor *Richmannus*, commodiores huic inſtituto aedes inhabitans. Quia vero, vti l. c. indicaui, cylindri, ad menſuras has adhibiti, 21 requirebantur, vt

alti-

altitudo pluuiae in vaſe a me adhibito, cuius quodlibet latus 19 pollicum, aſſurgeret ad vnum pollicem: et vero Cl. *Richmannus* adhibuit Hyetometrum ligneum, in quo calix habet ſuperne aream quadratam, cuius latus 2 pedum Lond. vel 24, poll. patet, inſtituto calculo, requiri ad hunc calicem quam proxime 33½. eiusmodi cylindros, vt altitudo puuiae in hoc calice ad altitudinem vnius pollicis excreſcat. Igitur hac ratione Obſervationes hoc Hyetometro factas reduxi ad pollices altitudinum pluuiae, et eorum partes centeſimas. Erat itaque altitudo pluuiae, et niuis liquefactae, in pollicibus duodecimalibus, et eorum partibus centeſimis pedis Londinenſis, ſequens:

1741.	Ianuarius	- - - - - -	0. 95
	Februarius	- - - - -	0. 37
	Martius	- - - - - -	0. 22
	Aprilis	- - - - - -	0. 93
	Maius	- - - - - -	0. 83
	Iunius	- - - - - -	1. 13
	Iulius	- - - - - -	1. 27
	Auguſtus	- - - - -	0. 75
	September	- - - - - -	2. 76
	October	- - - - - -	1. 37
	Nouember	- - - -	3. 01
	December	- - - -	0. 88
		Summa . .	14. 47

Ventos vehementes experti ſumus hoc anno diebus ſequentibus. Ianuarii 11. 12. 13. 21. 26. 28. 29. Februarii 15. 17. 24. 25. 26. 27. Martii 7. 10. 14. 15. 16. 21. 22. 23. 24. Aprilis 5. 12. 19. 20. 22. 27.

27. Maii 6. 8. 9. 12. 15. 29. 30. 31. Iunii 1. 14. 18. 23. 27. Iulii 1. 4 20. 25. 27. Auguſti 8. 13. Septembris 6. 10. 14 24. 27. 28. Octobris 2. 3. 16. Nouembris 1. 2. 6. 11. 15. 16. 19. 21. 26. 27. 30. Decembris 1. 2. 26. 30. Inter hos procellae fuerunt furentes diebus Ianuarii 12, circa horam 2. p. m. ſubito exſurgens. Februarii 26. Martii 15. 16. 21. 22. 23. 24. Aprilis 20. 22. Maii 9. 15. vno quaſi ictu circa horam 11. a. m. excitata. Octobris 3. Nouembris 26. 27. 30. Decembris 1. Quarum ea, quae ſaeviit Martii 24. ita vehemus erat, vt aſſerculum in Anemometro deſcripto inter *Obſeruationes Meterologicas ab an.* 1726 *vſque in finem anni* 1736. *factas* Praelect. 11. §. 10. ſaepius eleuaret ad gradus 75, vnde in minuti ſecundi tempore abſoluit pedes Rhenanos 109 $\frac{7}{13}$.

§. 10. Grandines experti ſumus Aprilis die 20, hora 5½ p. m ſpirante fortiſſimo Auſtro Euro; Maii 6, flante iterum forti Auſtro-Euro. Iunii 1, flante vehementi Auſtro-Zephyro, qui vix horae ſpatio ſpirare ante ceperat. Nouembris 12, ſine vento ſenſibili.

§. 11. Hoc eodem anno etiam ſumma diligentia in id incubui, vt obtinerem exactam Declinationem acus magneticae. Sequenti igitur conſilio rem hanc ſum aggreſſus. Obtinuit Academia a praeclariſſimo Artifice *Dietrico Metz.* Amſtelodamenſi, exactiſſime et penitus elaboratum tale Inſtrumentum, quale Cel. *Petrus van Muſſchenbroek* inuenit, et deſcripſit in *Diſſertationis Phyſicae Experimentalis de Magnete.* Experimento 109 pag. 233. in quo acus magnetica arcubus orichalceis, plane vti in *l.* c. praecipitur, donata, longitudinem tenet 6. pollicum

cum Londinenſ. Hac machina Declinatoria impetrata curaui erigi ſtylobatam lapideam, extructum non e lateribus, quoniam hi a ſuſpicione ferri non ſunt liberi, ſed e lapidibus maioribus campeſtribus, caemento inter ſe coagmentatis, nullo plane interueniente ferro, qui ſtylobata, altitudinis circiter 4. pedum, obtectus eſt marmorea tabula alba, politiſſima, et horizontali. Exſtructa eſt haec baſis lapidea prope aedes Academicas, ad diſtantiam ab his 76 pedum, in campo ibidem ſatis patente, ita vt prorſus nulla ſuſpicio ferri alicuius in hunc locum agentis ſupereſſe poſſit. Igitur in ſuperficie tabulae marmoreae duxi primo lineam meridianam, quam deinde ex Obſeruationibus Aſtronomicis Meridiei in Obſeruatorio Imperiali, huic ſtylobatae vicino, factis, adiuante hoc inſtitutum Cl. Domino Prof. *Heinſio* noſtro, aliquot dierum obſeruationibus correxi, atque ſic tandem concluſi, hanc meam meridianam a vera aberrare angulo 3′ 59″ a ſeptentrione Ortum verſus, cum meridiem 12″ temporis tardius iuſto indicaret. Eſt igitur error meae meridianae ſubtractiuus 3′ 59″. His ita praeparatis acceſſi Aprilis 13 et pluribus inſequentibus diebus ad ſtylobatam, ita vt quicquid ferrei, etiam minutiſſimi, apud me tenebam, id omne antea ſolicite ſepoſuerim; atque ſic, applicando aciem Inſtrumenti ad lineam meridianam ſtylobatae, inueni Declinationem apparentem acus magneticae exactiſſime 4° 0′ 0″. Occaſum verſus, cui ſi applicetur correctio ſubtractiua modo indicata, exoritur Declinatio acus magneticae vera 3° 56′ 1″. Occaſum verſus.

DE DENSITATE MIXTORVM EX METALLIS ET SEMIMETALLIS FACTORVM.

Auctore

C. E. Gellert.

§. 1.

Inſtitutis experimentis circa denſitatem duorum metallorum inter ſe commixtorum, de quibus videatur Cl. Domini Krafftii diſſertatio, inſuper metallis ſemimetalla admiſcui et mixtorum quaedam phaenomena praeprimis denſitatem obſeruaui; quae experimenta recenſere, phaenomena annotare et ſi potero explicare conabor.

§, 2. Metallis et ſemimetallis vtcunque puris vſus ſum, operationes, quantum pro meo apparatu ſuppellectilique chymica fieri potuit, accurate inſtitui; quasdam, quo me certiorem redderem reiteraui; ad vnamquamque operationem noua mundaque vaſa adhibui et ſollicite curaui ne quid peregrini mixtum ingrederetur; commixtionem mechanicam, vbi licuit, haud neglexi; cum colliquarem metalla difficulter fluentia cum ſemimetallis, ſuperaddidi aliquid tartari et vitri communis ad nimium diſpendium euitandum. Ponderationem hydroſtaticam ad denſitates detegendas, Cl. Krafftius, vt pote cuius curae inſtrumenta phyſica commiſſa ſunt, benigne in ſe ſuſcepit et pro more ſuo accuratiſſime confecit, quam beneuolentiam et reliqua in me collata beneficia omni qua par eſt obſeruantia animi, reuerentia grataque mente ſemper agnoſcam.

§. 3. Mixtorum denſitatem methodo conſueta examinaui et cum ea quam deberent ſecundum calculum habere comparaui; quam methodum hic apponere haud abſonum erit.

Denſitas corporis definitur, quod ſit materiae quantitas in corpore conſiderata cum relatione ad volumen corporis. Si itaque denſitatem corporis denotamus per D, quantitatem materiae per M, volumen corporis per V, erit $D = \frac{M}{V}$. Notum eſt pondera a corporibus in eodem fluido amiſſa eſſe in ratione voluminum; ſubſtituitur ergo ipſi V, pondus in eodem fluido amiſſum quod denotetur per *p*. Grauitas corporis ſpecifica eſt grauitas corporis conſiderata cum relatione ad volumen. Cum vero grauitates ſpecificae et denſitates corporum in corporibus homogeneis ſint in eadem ratione, ipſi M poteſt ſubſtitui grauitas corporis ſiue pondus abſolutum quod indigitemus per P. Poſſumus itaque hanc formulam $D = \frac{P}{p}$ ſubſtituere priori $D, = \frac{M}{V}$.

Ex definitione denſitatis patet, ſi alterius mixtum ingredientis quantitas materiae ſit M, volumen V, alterius quantitas materiae *m*, volumen *v*; denſitatem mixti debere eſſe $\frac{M+m}{V+v}$. Si itaque alterius ingredientis pondus abſolutum ſit P, alterius Q, alterius, pondus in eodem fluido amiſſum *p*, alterius *q*, denſitas erit $\frac{P+Q}{p+q}$.

Haec cum ita ſint, inquirendum eſt in pondera abſoluta tum mixtorum cum ingredientium, quae debent diuidi ſecundum has formulas per ſua pondera in eodem fluido amiſſa, prodibunt denſitates et experientia et computo repertae.

§. 4.

§. 4. Saepius omnium metallorum ſolo igne fuſorum pars aut ſub fumi aut florum ſpecie diſſipatur, aut in ſcorias conuertitur, auro et argento exceptis. Hinc huius diſpendii in denſitate ex calculo quaerenda, ratio eſt habenda; quod equidem ſatis accurate fieri poteſt in iis mixtis, quorum alterum ingrediens eſt aurum ſiue argentum: nam tunc quod perit iure a ſemimetallo altero ingredienti ſubtrahitur. In reliquis autem mixtis vbi vtraque ingredientia igne aliquid amittunt, non certo definiri poteſt quantum vnius cuiusque fuerit diſpendium; hanc ob cauſam nec denſitas computo accurate poteſt erui. Hoc autem nobis relinquitur, quod vt plurimum ſtabilire poſſumus aliquod mixtum rarius ſiue denſius neglecta quantitate eſſe factum quam calculus expoſcit; in quem finem inueni et adhibui duplicem methodum. Prima quae raro vſu venit haec eſt: ſi mixti denſitas deprehenditur maior, quam denſitas ingredientis denſioris, mixtum denſius eſt factum; ſi vero mixti denſitas minor eſt quam ingredientis rarioris, mixtum rarius eſt quam calculus requirit. Secunda, quae vtplurimum locum habet his conſiſtit. Sit rarioris ingredientis denſitas $\frac{P}{p}$ denſioris $\frac{Q}{q}$ diſpendium mixti a. Sit diſpendium a adſcribendum ingredienti rariori erit eius pondus abſolutum $P - a$ et pondus in aqua amiſſum $p - y$ hinc denſitas mixti $\frac{P+Q-a}{p+q-y}$. Sit diſpendium a adſcribendum ingredienti denſiori erit pondus huius abſolutum $Q - a$ et pondus in aqua amiſſum $q - x$, hinc tunc denſitas $\frac{P+Q-a}{p+q-x}$. Idem pondus corporis rarius plus ſui ponderis in aqua amittit, quam corporis denſioris ideo $y > x$ et $p+q-x, >$

$p + q$

$p + q - y$ et $\frac{P + Q + a}{p + q - x} < \frac{P + Q - a}{p + q - y}$. Hanc ob cauſam, ſi diſpendium deducitur ab ingredienti rariori et denſitas ſecundum calculum minor eſt, quam experientia reperta mixtum denſius eſt factum, ſi vero diſpendium auferatur, ab ingredienti denſiori et denſitas ex computo maior reperitur, quam denſitas experimento obſeruata, mixtum rarius eſt factum.

Experimentum I.

Auri grana $196\frac{3}{4}$ per fuſionem miſcui cum $289\frac{1}{2}$ ☉ et B
gr. Biſmuthi. Inquiſiui in pondus mixti admodum fragilis coloris ex albo coeruleſcentis; quod reperi duobus granis minutum.

Pars huius mixti 487. gr. amittebat in aqua 41. gr. hinc denſitas $\frac{487}{41} = 11,73$.

Auri $196\frac{3}{4}$ gr amittebant in aqua $12\frac{1}{4}$ gr. et Biſmuthi grana $289\frac{1}{2}$ amittebant 30 gr. Eſſet itaque ex computo denſitas mixti $\frac{196\frac{3}{4} + 289\frac{1}{2}}{12\frac{1}{4} + 30} = 11,51$. §. 3. ſi nullum diſpendium obſeruaſſem ſed etſi iſtud decrementum duorum granorum, quod Biſmutho attribuendum, ad calculum reuocare velles, nulla certe ſenſibilis orietur differentia. Videmus itaque hoc mixtum maioris eſſe denſitatis nempe 11,73 quam calculus oſtendit vtpote 11,51.

Experientia II.

Colliquaui 73. gr. Auri cum $96\frac{1}{2}$ gr. Zinci. Diſ- ☉ et Z
pendium erat $29\frac{3}{4}$. gr. Mixti admodum fragilis coloris dilute gryſei quaſi ſemimetallici grana $139\frac{1}{4}$. amittebant in

in aqua 12. gr. ideo denſitas erat $\frac{139\frac{3}{4}}{12} = 11,65$,

Auri grana 73. amittebant in aqua $4\frac{1}{4}$ gr. et $96\frac{1}{2}$ gr. Zinci amittebant 14. gr, ideo mixti denſitas debuiſſet eſſe $\frac{73 + 96\frac{1}{2}}{4\frac{1}{4} + 14} = 9,29$. Cum vero Zinci gr. $29\frac{3}{4}$. combuſta eſſent, rectius denſitas ſecundum calculum fuiſſet $\frac{63 + 66\frac{3}{4}}{4\frac{1}{4} + 9\frac{1}{4}} =, 9,98$. §. 3. Mixtum itaque experimento denſius eſt repertum.

Experimentum. III.

☽ B Vniui per fuſionem 195. gr. Argenti cum 213. granis Biſmuthi. Mixtum admodum fragile coloris medii inter Biſmuthum et Regulum Antimonii iacturam faciebat 10. gr.

Pars huius mixti pendebat in aere $352\frac{1}{2}$. gr. in aqua $317\frac{1}{4}$ gr. denſitas ideo erat $\frac{352\frac{1}{2}}{35\frac{1}{4}} = 10,00$.

Argenti grana 195. amittebant in aqua $21\frac{1}{4}$. Biſmuthi grana 213, ſubtractis vti par eſt 10. granis diſpendii amittebant in aqua 21. gr. hinc denſitas mixti ex calculo $\frac{195 + 203}{21\frac{1}{4} + 21} = 9,42$, §3, quae minor eſt quam experientia comprobata, hinc mixtum denſius.

Experimentum IV.

☽ et Z Colliquaui 138. gr. Argenti cum $231\frac{1}{2}$ gr. Zinci. Sub fumi et florum ſpecii diſſipata erant $58\frac{1}{4}$ gr. Mixtum fragile ſed minus quam mixtum exp. 3. granulatum qua-

ſi

ſi intus ſupurficiem, dum frangebatur, exhibebat, coloris nitidi regulini.

Fruſtum mixti 118¼. gr. amittebat in aqua 15¼ gr. hinc denſitas $\frac{118\frac{1}{4}}{15\frac{1}{4}} = 7,75$,

Argenti gr. 138. amittunt in aqua 15. gr. Zinzi 231½, ſi demas 58¼ gr. igne diſſipata amittunt 25¼, debuiſſet itaque denſitas ſecundum calculum eſſe $\frac{138 + 173\frac{1}{4}}{15 + 25\frac{1}{4}}$ $= 7,73$, quae oſtendit denſitatem paulo maiorem experientia eſſe repertam.

Experimentum V.

Per fuſionem miſcui Argenti gr. 181. cum 255, gr. Reguli Antimonii: operatione peracta deerant 115½ gr. Mixtum erat conſiſtentiae admodum fragilis, coloris regulini. ☽ et Reg. ♁ii

Pars mixti 154. gr. amittebat in aqua 18¼ gr. ideo denſitas $\frac{154}{18\frac{1}{4}} = 8,44$.

Argenti gr. 181, amittebant in aqua 19¾. gr. Reguli Antimonii grana 255, demtis 115½. gr decrementi amittebant 20½ gr. Eſſet itaque mixti denſitas ex computo $\frac{181 + 139\frac{1}{2}}{19\frac{3}{4} + 20\frac{1}{2}} = 7,96$. §. 3. multo minor quam experimento detecta.

Ezperimentum VI.

Commiſcui inter ſe cupri gr. 644. et eandem quanti, ♀ et Zn

titatem Zinci: mixto effuſo combuſta erant 202. gr. Mixtum fragile coloris aurei quadam tenacitate erat praeditum.

Pars huius mixti 915. gr. amittebat in aqua 119. gr. hinc denſitas $\frac{915}{119} = 7, 69$.

Analogice concludere licet et hoc mixtum denſius eſſe factum, quam calculus indicat, aliud etenim mixtum eorundem ingredientum feci, quod denſius erat quam ipſum Cuprum, nempe illius denſitas erat 8, 78. Cupri 8, 74.

Experimentum VII.

♀ et B Colliquaui Cupri grana 686. cum $898\frac{1}{2}$ gr. Biſmuthi. Ignis rapuerat 23. gr.

Mixtum fragile coloris ex rubicundo albeſcentis texturam Biſmuthi teſſulatam prodebat.

Pars mixti $514\frac{3}{4}$ gr. amittebat in aqua $55\frac{3}{4}$ gr. inde denſitas $\frac{514\frac{3}{4}}{55\frac{3}{4}} = 9, 23$. Ponamus nihil de eſſe denſitas erit $\frac{686 + 898\frac{1}{2}}{78\frac{1}{2} + 93\frac{1}{2}} = 9, 21$.

Si diſpendium ſubtrahimus a Biſmutho denſitas eſſet $\frac{686 + 875\frac{1}{2}}{78\frac{1}{2} + 91} = 9, 215$. Si vero iſta 23 grana auferuntur a Cupro haec prodit denſitas, $\frac{663 + 898\frac{1}{2}}{75\frac{1}{4} + 93\frac{1}{2}} = 9, 32$. Patet itaque hoc mixtum non maiorem denſitatem habere quam calculus requirit, ſed hanc potius ſatis accurate cum calculo conuenire.

Expe-

Experimentum VIII.

Liqueſeci Cupri grana 314. cum 464. granis Reguli Antimonii. Mixtum conſiſtentiae admodum fragilis, coloris ex rubicundo coerulei vi ignis $43\frac{1}{2}$ gr. deperdiderat. ♀ et Reg. ♁ii.

Pars mixti $699\frac{3}{4}$ gr. amittebat in aqua $87\frac{1}{4}$ gr. hinc denſitas $\frac{699\frac{3}{4}}{87\frac{1}{4}} = 8,02$.

Ponamus $43\frac{1}{2}$ gr. ingredientis rarioris nempe Reguli Antimonii combuſta eſſe, licet et ignis valide in Cuprum agat denſitas eſſe $\frac{314 + 420\frac{1}{2}}{36 + 62.} = 7,49$. §. 3. Hoc mixtum itaque denſius eſt factum. §. 4.

Experimentum IX.

Inter ſe confudi 684. gr. Zinci et 741. gr. Stanni. Diſpendium erat 9. gr. ♃ et Z.

Mixtum coloris ex albo obſcurioris nigricantis erat paulo minus malleabile quam ipſum ſtannum. Pars mixti 1008. gr. amittebat in aqua 143. gr. hinc denſitas $\frac{1008}{143} = 7,05$.

Ponamus diſpendium 9. gr. Stanno vt pote ingredienti denſiori eſſe attribuendum denſitas eſſet ſecundum calculum $\frac{722}{100} + \frac{684}{100} = 7,08$. Hoc mixtum itaque rarius eſt factum §. 4.

Experimentum X.

Miſcui $838\frac{1}{2}$ gr. Stanni granis 723 Biſmuthi. Nulum diſpendium obſeruare potui. ♃ et B.

 Mix-

Mixtum erat admodum fragile, ſuperficies externa fla-veſcente interna medio inter Biſmuthum et Stannum colore tincta. Textura Biſmuthi teſſulata apparebat.

Pars mixti 966 gr. amittebat in aqua 116 gr. hinc denſitas $\frac{966}{116} = 8,32$, quae ſecundum calculum fuiſſet $\frac{838\frac{1}{2} + 723}{114\frac{1}{2} + 75} = 8,24$, ideo mixtum paulo denſius eſt repertum, quam calculus indigitabat. §. 4.

Experimentum XI.

♃ et Reg. ♁ii

Commiſcui Stanni $231\frac{3}{4}$ gr. et Reguli Antimonii $231\frac{3}{4}$ gr. Iacturam habui 77. gr.

Mixtum coloris albi regulini erat admodum fragile. Pars mixti $374\frac{1}{2}$ gr. amittebat in aqua 54 gr. hinc denſitas $\frac{374\frac{1}{2}}{54} = 6,94$.

Auferatur iactura 77. gr. a Stanno ingredienti denſiori denſitas eſſet $\frac{154\frac{3}{4} + 231\frac{3}{4}}{21 + 34\frac{1}{4}} = 7,00$. quae, cum maior eſt quam experimento detecta, oſtendit hoc mixtum rarius eſſe factum. §. 4.

Eperimenrum XII.

♄ et Z.

Colliquaui Zinci $405\frac{3}{4}$ gr. et $415\frac{1}{2}$ gr. Plumbi. Diſpendium erat 48. gr.

Maſſa effuſa primo intuitu homogenea quidem apparebat, ſed curatius conſiderata duo quaſi ſtrata arcte inter ſe cohaerentia ſiſtebat, plumbum nempe lege Hy-

dro-

droſtaticae locum inferiorem, Zincum ſuperiorem ſibi vindicabat, ita vt facile a ſe inuicem diſtingui poſſent, oculo, cultro, malleo.

Experimentum omni cura reiteratum, iugi adhibita circumactione, eadem praebebat phaenomena, praeter quod denſitas paulo maior nempe $\frac{353}{36} = 9,81$, et color Plumbi dilutior obſeruabatur. Prioris etenim mixti denſitas erat $\frac{758}{84} = 9,02$.

Ponatur diſpendium ab ingredienti rariori prouenire, denſitas eſſet $\frac{357 + 415\frac{1}{2}}{53\frac{1}{4} + 36\frac{1}{2}} = 8,70$.

Videmus itaque difficulter equidem nec in magna quantitate ſed intime Zincum ſe Plumbo commiſcere et mixtum denſius eſſe factum. §. 4.

Experimentum XIII.

Confudi Plumbi grana $352\frac{1}{2}$ cum totidem granis Biſmuthi. Iactura erat 48. gr. ♄ et B

Mixtum cultro abraſum erat coloris albi ſplendentis, fractum obſcurioris nigricantis, texturae Biſmuthi. Dum frangebatur tenax imo quodammodo ductile erat.

Pars mixti $652\frac{3}{4}$ gr. amittebat in aqua $60\frac{3}{4}$ gr. hinc denſitas erat $\frac{652\frac{3}{4}}{60\frac{3}{4}} = 10,74$. Si diſpenpium ſubducitur a Biſmutho ingredienti rariori, licet ignis et plumbi partem deſtruat, habemus hanc denſitatem $\frac{304\frac{1}{2} + 352\frac{1}{2}}{34 + 32} = 9,95$. Mixtum ideo denſius eſt repertum. §. 4.

Expe

Experimentum XIV.

♄ et Reg ♂ Colliquaui Plumbi grana $386\frac{1}{2}$ et Reguli Antimonii 333. Operatione peracta deerant $101\frac{1}{2}$ gr.

Mixtum fragile dum frangebatur nitidam quaſi granulatam intus ſuperficiem exhibebat coloris obſcurioris regulini.

Pars huius mixti $536\frac{1}{4}$ gr. amittebat in aqua $58\frac{1}{2}$ gr. ideo denſitas $\frac{536\frac{1}{4}}{58\frac{1}{2}} = 9,17$. Si iactura auſertur ab ingredienti rariori Regulo Antimonii denſitas eſſet $\frac{386\frac{1}{2} + 231\frac{1}{2}}{33\frac{3}{4} + 34} = 9,12$. Mixtum itaque denſius eſt factum. §. 4.

Experimentum XV.

♂ et Z. Limaturae Ferri $115\frac{1}{2}$ gr. commiſcui cum 231 gr. Zinci. Perierant 97 grana.

Mixtum fragile vbi fractum erat colorem ferme plumbaginis referabat et a Magnete attrahebatur.

Pars $117\frac{3}{4}$ gr. amittebat in aqua 17 gr. hinc denſitas $\frac{117\frac{3}{4}}{17} = 6,926$. Ponamus 97 gr. ingredientis denſioris Ferri combuſta fuiſſe, mixti denſitas ex computo eſſet $\frac{18\frac{1}{2} + 231}{2\frac{1}{4} + 33\frac{3}{4}} = 6,931$. Quoniam itaque haec denſitas paulo maior eſt, quam experimento detecta et certi ſumus Zincum facilius comburi quam Ferrum, affirmare poſſumus, hoc mixtum rarius eſſe, quam calculus requirit. §. 4.

Ex-

Experimentum XVI.

Colliquaui limaturae Ferri 115½ gr. et Biſmuthi ♂ et [illegible]
231 gr. iacturàm habui 87. gr.

Mixti fragilis color prodebat Biſmuthum eiusque partes a Magnete attrahebantur.

Fruſtum 122½ gr. amittebat in aqua 15½ gr. hinç denſitas erat $\frac{122\frac{1}{2}}{15\frac{1}{2}} = 7,90$. Subtrahamus a Biſmutho vt pote ingridienti denſiori iacturam 87 gr. eſſet denſitas ſecundum calculum $\frac{144 + 115\frac{1}{2}}{15 + 14\frac{3}{4}} = 8,72$. Cum itaque haec illam ſuperat, hoc mixtum ràrius eſt factum. §. 4.

Experimentum XVII.

Limaturae Ferri 115½ gr. et Reguli Antimonii 173 ♂ et Reg. ♁ii.
gr. vniui per fuſionem. Combuſta erant 63 gr.

Mixtum fragile coloris cinerei, maculis rubiginoſis.

Pars mixti 204 gr amittebat in aqua 29½ gr. ideo denſitas erat $\frac{204}{29\frac{1}{2}} = 6,92$.

Diſpendium 63 gr. ſi ſubtrahamus ab ingredienti denſiori Ferro, denſitas ex computo erit $\frac{52\frac{1}{2} + 173}{6\frac{1}{2} + 25\frac{1}{2}} =$ 7,05. Hanc ob cauſam mixtum experientia rarius eſt repertum, quam calculus ponit.

Admodum generoſus Magnes ne ſcobem quidem attrahebat, praeter vnam alteramue particulam minimam, quae mihi ferrum adhuc eſſe videbatur.

Experimentum XVIII.

Z et B Confudi Zinci gr. $362\frac{1}{4}$ et eandem quantitatem Biſmuthi. Deſideraui 11 gr.

Haec duo Semimetalla ſeſe non commiſcuerant, ſed maſſa effuſa ſpeciem duorum ſtratorum arcte inter ſe cohaerentium referebat, quorum inferius Biſmuthum vt pote ingrediens denſius, ſuperius Zincum erat.

Fruſtum horum ſtratorum ponderis 379 gr. amittebat in aqua 49 gr. hinc denſitas $\frac{379}{49} = 7,73$, quae diſpendio neglecto fuiſſet $\frac{362\frac{1}{4} + 362\frac{1}{4}}{52\frac{3}{4} + 37\frac{1}{2}} = 8,03$. Haec itaque ſubtracto diſpendio et attentione in quasdam cauitates, quas aqua penetrare haud potuit, facta, cum illa conuenire dici poteſt.

Experimentum XIX.

Z et Reg. ♁ii. Colliquaui Zinci gr. 319. et tot grana Reguli Antimonii, diſpendium fuit 102. gr.

Maſſa fragilis bene permixta, homogenea, vbi fracta, erat coloris ex albo cinerei, in ſuperficie externa multicolor.

Pars huius mixti $210\frac{3}{4}$ gr. amittebat in aqua $32\frac{3}{4}$ gr. hinc denſitas $\frac{210\frac{3}{4}}{32\frac{3}{4}} = 6,43$, quae cum minor ſit quam ingredientis rarioris, oſtendit hoc mixtum rarius eſſe factum. §. 4. Reguli etenim Antimonii vt pote ingredientis rarioris denſitas erat 6,77.

Ex-

Experimentum XX.

Conſudi tum Biſmuthi cum Reguli Antimonii grana 198. iactura erat 19. gr. B et Reg. ♁ii.

Mixtum admodum fragile ſtructuram teſſulatam et colorem ſed paulo dilutiorem Biſmuthi referebat. Pars mixti $342\frac{1}{4}$ gr amittebat in aqua $42\frac{1}{2}$ ideo denſitas $\frac{342\frac{1}{4}}{52\frac{1}{2}}$ $= 8,96$. Ponamus 19 gr. ingredientis denſioris Biſmuthi combuſta eſſe mixti denſitas deberet eſſe $\frac{179 + 198}{18\frac{1}{2} + 29}$ $= 7,94$. Hoc mixtum itaque denſius eſt factum. §. 4.

Experimentum XXI.

Mixtum Argenti et Mercurii feci conterendo digerendoque, quod Amalgama vocatur. Mercurio ſuperfluo per alutam expreſſo Amalgama in mercurio fundum petebat. Hinc inferebam hoc mixtum denſius eſſe factum §. 4. ☾ et ☿.

Ne autem dubium eſſet, quin hoc phaenomenon ab alia quacunque cauſa proueniret, indidi in langenulam vitream Amalgama et affudi circiter tertiam partem Mercurii, lagenula obturamento laeuigato accuratiſſime clauſa deprehendi pondus Amalgamatis vna cum Mercurio eſſe 1367. granorum, cum Mercurius ſolus in eadem lagegenula ponderatus tantum eſſet $1355\frac{1}{2}$ gr. Aqua pura in eodem vaſculo pendebat 96 gr. Scimus denſitates corporum eiusdem voluminis eſſe vti pondera abſoluta §. 3. Poſita itaque denſitate aquae 1,00 denſitas mixti eſt $\frac{1366}{96}$ $= 14,24$. Mercurii ſolius $\frac{1355\frac{1}{2}}{96} = 14,15$. Cum in-

ſuper tertia pars Mercurii Amalgamati fuerit addita, videre eſt Amalgama haud parum denſius eſſe factum.

Quod hanc penſionem attinet, moneo, me illam ſatis accurate perficere potuiſſe, repetita etenim penſione vnius eiusdemque corporis, ne illius quidem grani diſcrimen obſeruare potui.

§. 5. Recenſitis experimentis tabulam ſubſequentem ſubiiciam, quo quaſi vno obtutu videre liceat, quaenam mixta per haſce obſeruationes denſiora quaeue rariora reperta fuerint, quam calculus expoſcit.

Mixtum	Auri et Biſmuthi, factum eſt	denſius.
— —	Auri et Zinci — — — —	denſius.
— —	Argenti et Biſmuthi — — —	denſius.
— —	Argenti et Zinci — — —	denſius.
— —	Argenti et Reguli Antimonii —	denſius.
— —	Cupri et Zinci — — —	denſius.
— —	Cupri et Biſmuthi ferme cum calculo conuenit.	
— —	Cupri et Reg. Antimonii — —	denſius.
— —	Stanni et Zinci — — —	rarius.
— —	Stanni et Biſmuthi — — —	paulo denſius.
— —	Stanni et Reg. Antimonii — —	rarius.
— —	Plumbi et Zinci — — —	denſius.
— —	Plumbi et Biſmuthi — — —	denſius.
— —	Plumbi et Reg. Antimonii —	denſius.
— —	Ferri et Zinci — — —	rarius.
— —	Ferri et Biſmuthi — — —	rarius.
— —	Ferri et Reg. Antimonii —	rarius.
	Zincum et Biſmuthum commixtionem reſpuebant.	
— —	Zinci et Reg. Antimonii —	rarius.

— —

— — Biſmuthi et Reg. Antimonii – denſius.
— — Argenti et Mercurii — — denſius.

§. 6. Ex hac tabula perſpicuum eſt,

1.) Mixtum Cupri et Biſmuthi denſitatem calculo conuenientem habere.

2.) Mixta Ferri et Zinci, Ferri et Biſmuthi, Ferri et Reg. Antimonii, Stanni et Zinci, Stanni et Reg. Antimonii, Zinci et Reg. Antimonii rariora eſſe facta.

3.) Reliqua, quae maiorem numerum conſtituunt, denſitatem calculo erutam ſuperare.

§. 7. Si explicationem horum Phaenomenorum aggredi audeamus conſiderandum eſt,

1.) Quidnam fieri debeat, vt mixta aut rariora aut denſiora euadant, aut denſitatem cum calculo conuenientem retineant.

2.) Quaenam ſit cauſa huius mutationis.

Mixta Metallorum et Semimetallorum tunc fieri denſiora ſi partes vnius intrant poros alterius, et rariora ſi partes diſtendunt poros alterius, denique retinere denſitatem cum calculo conuenientem ſi partes vtriusque ſibimet inuicem quaſi apponuntur, a veritate non abhorrere puto. Quare autem haec ita fiant altioris eſt indaginis. Mihi videtur hanc mutationem prouenire a ſtructura, quantitate, attractione et repulſione partium conſtituentium. Structuram et quantitatem conſiderandam eſſe colligo ex Exp. 9. 11. 15. 16. 17. Nam notum eſt Ferrum et Stannum multa ſcatere terra, a qua pars inflammabilis igne facile diuelli poteſt, quo facto tales partes terrae, loco figurae ſphaericae, quam antea in fluxu habebant, aliam

 quam-

quamcunque induunt figuram, quae in fluxu globulis alterius Metalli ſeu Semimetalli interpoſitae forſan hos magis diſtendunt, quam ſi ipſae adhuc globuli eſſent, ideo mixta fiunt rariora. Attractionem et repulſionem circa partes Metallorum er Semimetallorum fuſorum dari, comprobant experimenta, vbi omni adhibita cura nulla commixtio procedit, et alia vbi miſcenda admodum auide coëunt, ita vt e. g. Cuprum cum Zinco, Ferrum cum Stanno longe mitiori ignis gradu fundantur, quam ſi ſola igni expoſita fuiſſent.

§. 8. Huic diſſertationi apponere lubet ſingulare quoddam phaenomenon Magnetis, quod occupatus circa mixta Metallorum et Semimetallorum detexi. Obſeruaui nempe Magnetem minorem plus agere in mixta Ferri cum Metallis et Semimetallis Magnete maiore, qui Ferri quantitatem duplo maiorem attrahit quam minor. Experimenta, quae hunc in finem inſtitui, breuitatis cauſa in hanc tabulam conieci. Prima columna continet octo Magnetes A, B, C, D, E, F, G, H, denotatos. Vnicuique adſcriptum eſt, pondus proprium cum armatura, pondus quod attrahit, quaenam iſtius in digitis et lineis pedis Anglicani ſit longitudo, altitudo, latitudo et diſtantia pedum. In ſecunda 3tia, 4ta, 5ta et 6ta columna ſunt fruſta mixtorum cum ſuo pondere deſignata et e regione vnius cuiusque Magnetis videre eſt, quomodo quilibet in iſta mixta agat?

Mixta

Mixta

Magnetes armati	☽ et ♂ Duo Fruſta 31 granorum pendentia	☿ et ♂. Fruſta 1) 60 gr. 2) 55 gr.	♃ et ♂. Fruſta 1) 75 gr. 2) 30 gr.	Biſmuthum et ♂. Fruſta 1) 72 gr. 2) 29 gr. 3) 12 gr.	Zincum et ♂ Fruſta 1) 76 gr. 2) 15 gr.
A. Pondus pr. 26 Loth. Vis 6. libr. Long. 1 d. 8 l. Alt. 1 d. 6 l. Lat. 1 d. -- Diſt. ped. 1 d. 1 l	Ambo attrahebat ita, vt ſuperius teneret inferius.	Ambo attrahebat.	Ambo attrahebat.	Singula.	Singula ſed maius vix.
B. Pond. pr. 2 libr. 10 L. Vis 4 $\frac{1}{2}$ libr. Long. 3 d. 2 l. Alt. 3 d. 6 l. Lat. 1 d. 6 l. Diſt. ped. 2 d. 6 l.	Item ac antecedens.	Alterutrum valide attrahebat.	Alterutrum.	Duo priora mouebat tertiam attollebat	Maius mouebat reliqua teneeat.
C. Pond. pr. 2 libr. 25 L. Vis 2 libr. 10 L. Long. 3 d. 6 l. Alt. 2 d. - - Lat. 2 d. 1 l. Diſt. ped. 2 d. 7 l.	Alterutrum attrahebat.	Alterutrum mouebat ſed non tenebat.	Alterutrum tenebat.	Nullum mouebat fruſtula autem vnius grani attrahebat.	Nullum mouebat, fruſtula 1. gr. attrahebat.
D. Pond. pr. 1 9. Loth. Vis 2 libr. 5 L. Long. 1 d. 6 l. Alt. - - 8 l. Lat. 1 d. - - Diſt. ped. - - 7$\frac{1}{2}$ l	Item ac antecedens.	Item ac antecedens.	Vix alterutrum	Item ac antecedens.	Item ac antecedens.
E. Pond. pr. 7 L. Vis 1 libr. 8 L. Long. 1 d. 1 l. Alt. - - 8 l. Lat. - - 6 l. Diſt. ped. - 6 l.	Vnum attrahebat quocum in alterum agebat ſed attollere non poterat.	Satis valide alterutrum attrahebat.	Alterutrum et fortius quam res antecedentes.	Omnia 3ia mouebat, 4tum 5. gr. attollebat.	Vtrumque mouebat tertium 2. gr. attrahebat.
F. Pond. pr. 7 L. Vis 24 Loth. Long. 1 d. 1. l. Alt. - - 8 l. Lat. - - 7 l. Diſt. ped. - 5$\frac{1}{2}$ l.	Vnum attrahebat et minus quam antecedens in alterum agebat.	Ferme vti C. et D.	Vix alterutrum	Vti C. et D.	Vti C. et D.
G. Pond. pr. 1$\frac{1}{3}$ L. Vis 1 libr. 4 L. Long. - d. 6$\frac{1}{2}$ l. Alt. - 4$\frac{1}{2}$ l. Lat. - 4$\frac{1}{2}$ l. Diſt. - 4$\frac{1}{2}$ l.	Alterutrum attrahebat, quocum magis quam antecedentes in alterum agebat.	Alterutrum et paulo fortius quam B.	Alterutrum ſed multo fortius quam antecedentes.	Singula ſed paulo debilius quam A.	Maius admodum mouebat minus attrahebat.
H. Pond. pr. 1 L. Vis 4 L. Long. - d. 5 l. Alt. - 4 l. Lat. - 2 l. Diſt. ped. 3$\frac{1}{2}$ l.	Haec non aſtmino a attrahebat.	neutrum.	Alterutrum mouebat ſed non tenebat.	Vti C. D. et F fruſtula 1. gr. attrahebat.	Fruſtula minora quam C. D. et F attrahebat.

DE LAPATHO ORIENTALI, FRVTICE HVMILI FLORE PVLCHRO INST. R. H. COR.

Auctore

Ioanne Ammano.

Tab. XIII. In tractatu de ſtirpibus rarioribus in Imperio Rutheno ſponte prouenientibus mentionem feci *Lapathum Orientale*, fruticem humilem flore pulchro et Atriplicem Orientalem, fruticem aculeatum flore pulchro Inſt. r. h. Coroll. pag. 38. a I. P. Tournefortio recénſitas atque ab eodem Auctore in Oriente primum detectas ſingulares et valde pulchras duas haſce plantas in Kirgiſiorum atque Baskirorum Tatarorum regionibus, nec non in variis Sibiriae locis prouenire.

Tournefortius harum plantarum nomina tantum, deſcriptiones autem et icones nullas cum publico communicauit.

Poſt Tournefortium Chriſtianus Buxbaumius per Ruſſiae et Perſiae ad Caſpium mare ſitas prouincias Conſtantinopolim petens, in Media quoque prope vrbem *Ienſchi* ſeu *Hanſem* locis glareoſis circa fluuios et riuulos poſteriorem, Atriplicem nempe, obſeruauit, deſcriptionem vero et iconem exhibuit in Centur. ſuarum 1^{a}. pag. 19. Tab. XXX. Melius deinde eandem plantam delineauit et deſcripſit I. Iacobus Dillenius in Horto Elthamenſi pag. 47. Tab. XL. fig. 47.

Prioris,

Prioris, Lapathi nempe Orientalis, fruticis humilis, flore pulchro nec icon, nec deſcriptio apud rei herbariae ſcriptores, quod ſciam, reperitur. Quare operae pretium exiſtimaui illam coram Academia praelegere, quam anno praeterito in horto Academico ex planta viua, pulchre florenti et ſemina ferenti, accurata icone illuſtratam, conſtitui.

Excreſcit nempe elegans hic frutex in cubitalem plus minus altitudinem, mox a radice pluribus tenuibus et lignoſis ramis praeditus, intus laete viridibus, extus albicanti vel ſubincano ſubtiliſſimo cortice obductis, quaquauerſum nullo determinato ordine diſpoſitis, procumbentibus vt plurimum et tortuoſis.

Ex his primo Vere enaſcuntur folia alternatim poſita, vtrinque acuta, magnitudine, forma, colore et conſiſtentia ad Polygoni oblongo anguſto folio Caſp. Bauh. Pin. quam proxime accedentia, niſi quod rigidiora ſint et acutiora, marginibus ſubinde parum reflexis.

Iunio Iulioque menſibus in hac regione e ramorum ſummitatibus nec non et foliorum alis flores oriuntur in ſpicas tenues diſpoſiti, vnciales aut biunciales. Singuli flores, petiolis trientem plus minus pollicis longis et dilute rubentibus ſuſtentati, ex octo conſtant ſtaminibus, valde gracilibus, albicantibus, apices ſubrotundos, paruos, luteolos gerentibus, et piſtillo ſtaminibus dimidio fere breuiori, albenti itidem, cuius apex in tria corpuſcula globoſa ſeu ſtigmata alba terminatur. Hae floris partes calice continentur in quinque ſegmenta inaequalia fere ad baſin vſque diſſecto, quorum tria interiora exterioribus duobus triplo ad minus ſunt maiora. Segmenta haec ini-

 tio

tio dum ſeſe explicant, album obtinent colorem, maturante vero fructu roſeum ſeu ſuaue rubentem acquirunt. Interiora, maiora ſcilicet, creſcente in dies embryone, cui piſtillum innaſcitur, valde ampliantur, inflectuntur et fructum arcte amplectuntur. Exteriora duo eandem fere magnitudinem ſeruant, quam habuerunt, dum expandebantur; maturo autem fructu reflectuntur.

Fructus eſt ſemen Acetoſae vel Lapathi ſemini perfecte analogum, triangulum, ſpadiceum, ſplendens, grani Triticei magnitudine, quod Auguſto demum menſe ad maturitatem peruenit.

Cultura delicatiori opus non habet, ſed amat magis ſolum liberum et apertum, ſoli ventiſque expoſitum; ſaeuiſſimas quoque hyemes, ſi modo niue tectum ſit, facile tolerat.

Carolus Linnaeus ex hac iam deſcripta planta, ex Atriplice, de qua ſupra mentionem feci, et ex alio Africanae originis frutice a Dillenio in Horto Elthamenſi pag. 36. Tab. XXXII. fig. 36. delineato et deſcripto, genus peculiare ſub titulo Atraphaxis, graeco a Dioſcoride Atriplici vulgari impoſito nomine, inſtituit et in Horto Cliffortiano pag. 137 et 138 ſpecies eiusdem recenſuit. Videamus an noſtra haec planta ad nouum Atraphaxeos genus referri poſſit et debeat. Character huius generis eſſentialis ab Auctore in Generibus ſuis plantarum n: 298. pag. 105. exhibitus, praecipue in numero ſtaminum ſeu maritorum, vt alibi loqui idem amat, et ſtigmatibus duobus ſeu faeminis conſiſtit, nempe duae faeminae cum ſex maritis nuptae ſunt; impraegnatae vero vnicum ſubrotundum compreſſum infantem parturiunt,

turiunt, ab aliis ſemen plantae vocatum. Secundum methodum Auctoris ſexualem recte Atriplex illa Orientalis, vnde character noui huius generis petitus videtur, ad Hexandria Digynia refertur. Cum noſtra autem planta res plane aliter ſe habet: in hac enim faeminae tres octo maritis nubſerunt; faeminae autem tres ſimul e maritis grauidae factae edunt infantem anguloſum, triquetrum, ſplendentem, ſpadiceum. Quam ob rem ſecundum ipſius methodum ad octandria trigynia poſt Biſtortam vel Polygonum referenda fuiſſet haec planta, aut ſaltem ad alterutrum horum generum. Ad polygonum tamen propius accedere videtur, quam ad Biſtortam, habitu in primis externo, creſcendique modo.

Tab. XIII. fig. 1. ramos plantae repraeſentat floribus et ſeminibus onuſtos; fig. 2. calycem cum ſtaminibus; fig. 3. ſemen maturum intra calycem contentum.

 CLASSIS

CLASSIS TERTIA

CONTINENS

HISTORICA

DE ALCIBIADE CERTAMINIS CVRVLIS OLYMPICI APVD ELEOS VICTORE OBSERVATIO HISTORICO-CRITICA.

I. H. SCHVLZE.

De Alcibiadis victoria curuli Olympica vtrumque iure dixeris, quod nihil illa illuſtrius ſit, eademque nihil etiam obſcurius maioribuſque tenebris obtectum. Mihi certe ad antiquitates athleticas per XXV. annos non mediocriter attento, ſaepius contigit hic haerere, et exitu deſperato recedere ab illa inueſtigatione. Non quod res ipſa ſit illuſtribus teſtimoniis deſtituta: ſed quod recentiorum quorundam explicationibus occupatam mentem attuleram, quibus tamquam ſaxo adhaereſcens parum aberam, quin potius THVCYDIDEM, DEMOSTHENEM, PLVTARCHVM, ATHENAEVM erroris arguerem aut ſuſpectos haberem, quam meos a ducibus non exiguae auctoritatis acceptos errores repudiarem. Non diffiteor me hoc ſcepticiſmo fluctuantem Harduinianis dubitationibus aliquando tribuiſſe pluſculum, iamque animo certe ad bellum bonis auctoribus inferendum fuiſſe paratum: immo calamum arripueram, vt oſtenderem fieri non poſſe, vt vera ſint, quae de Alcibiade apud dictos auctores legeram: ſaltem non poſſe concipi, quomodo Olympici agonis apud Eleos victor fuerit. Poſt-

Poſtquam autem longo attentoque omnium, quae in cauſſa obueniunt, examine omnino cognoui, nihil eſſe quod nos cogere debeat ad Alcibiadem a victoribus celebrium apud Eleos certaminum ſegregandum, aut ad ſuſpectos habendos teſtes illius victoriae: operae pretium me facturum ſperaui, ſi de hoc argumento aliquid commentarer, easque obiectiones remouerem, quae me ipſum non exiguo temporis ſpatio remoratae fuerunt. Id dum praeſtare conor, non raro, re ita exigente, cogar indicare ſuis nominibus aliquos, a quibus diſſentio. Quamquam autem calamo ita temperaturus ſum, vt nihil, niſi modeſtiſſime et placidiſſime dictum effluat: rogo tamen ac obteſtor lectorem beneuolum, velit ita omnia in optimam partem accipere, vt de me perſuaſiſſimum habeat, non cum eruditis viris ſententiarum auctoribus, ſed cum ſententiis ipſis certamen ſuſcipi: nullamque me palmam optare, niſi quam ipſa veritas manu ſua porrigat.

Sed ad rem accedendum eſt. Quum anno belli Peloponneſiaci XVII. Siculi Egeſtaei auxilium Athenienſium aduerſus finitimos Selinuntios implorassent; diuerſaeque eſſent ſententiae: iuuenis Alcibiades, qui ad capeſſendam rempublicam nuper primum acceſſerat, omnino cupiebat, vt Egeſtaeis ſuppetiae ferrentur. Sed Nicias ipſi ita aduerſabatur, vt in concione multa liberius in Alcibiadis iuuentutem, inque immodicos ſumtus, quos in alendos equos faciebat, iactaret. Huic reſpondens Alcibiades, haec de ſe commemorabat: *ὧν πέρι ἐπιβόητός εἰμι, τοῖς μὲν προγόνοις μου καὶ ἐμοὶ δόξαν φέρει ταῦτα,*

τῇ

τῇ δὲ πατρίδι καὶ ὠφέλειαν. Οἱ γὰρ Ἕλληνες καὶ ὑπὲρ δύναμιν μείζω ἡμῶν τὴν πόλιν ἐνόμισαν, τῷ ἐμῷ διαπρεπεῖ τῆς Ὀλυμπίαζε θεωρίας, πρότερον ἐλπίζοντες αὐτὴν καταπεπολεμῆσθαι. Διότι ἅρματα μὲν ἑπτὰ καθῆκα, ὅσα οὐδεὶς πω ἰδιώτης πρότερον, ἐνίκησα δὲ, καὶ δεύτερος καὶ τέταρτος ἐγενόμην, καὶ τἄλλα ἀξίως τῆς νίκης παρεσκευασάμην. Quae Latine ſic efferenda puto: „ea, propter quae ad vos delatum me ſugillatumque audiui, non maiorem mihi meisque progenitoribus gloriam, quam patriae vtilitatem afferunt. Nam quod ego ad Olympica ſacra cum tanto tamque ſplendido apparatu profectus fui, effecit vt Graeci, qui tantum non expugnatos belloque fractos nos exiſtimauerant, nulla vi ſuperabilem ciuitatem noſtram iudicarent. Currus enim in certamen dimiſi ſeptem, quod ante me priuatus nemo vnquam fecit: iiſque et victoriam adeptus ſum, et a victore ſecundum quartumque locum: ne dicam, quam me victoria dignum in ceteris praeſtiterim.

His Thucydideis ex *libr. VI. cap.* 16. allatis ſubiungat beneuolus lector, quae PLVTARCHVS de eodem viro tractans, reliquit *Tom. I. pag.* 196. et quae ad hoc argumentum pertinentia apud ATHENAEVM leguntur *dipnoſophiſt. XII. pag.* 534. ex antiquiore auctore ANTISTHENE relata: quorum aliqua inferius magis commodo loco afferenda proſpicio. Sed age propius inſpiciamus THVCYDIDIS ſingula verba. Ὧν πέρι ἐπιβόητός εἰμι, exponendum putaui: ea, propter quae delatum me ſugillatumque audiui: Nicias enim illa oratione, quae ab auctore antea relata eſt, pungit iuuenem

quendam equeſtris rei vltra modum ſtudioſum, quique ſumtibus nimiis in eam factis attritus leuari cupiat, imperio aliquo in ſe collato. Alcibiades ſe non ignarum eſſe, quem ſignificare hac ad populum oratione voluerit, initio ſtatim profitetur. Si vero velimus in genere hoc dictum eſſe, vt plures eiusdem accuſationis auctores ſimul intelligat, vertere licebit: ea, propter quae vulgo traducor. Non enim Niciam vnum id feciſſe, ſed Alcibiadem eſſe, in quem iam antea Ariſtophanes lepidiſſimam comoediam, *Nubes*, conſcripſit, vt ipſum quidem oblique, ſed apertius Socratem apud populum criminaretur, veteres, qui de ea comoedia commentati ſunt, nos edocent. Vocabulum ἐπιβόητος in bonam partem non accipi, et IVL. POLLVX Lib. V. ſect. 159. docet, et Graeci ſermonis vſus confirmat.

Sequitur nunc, quod maxime requirimus, quo referendum ſit τὸ διαπρεπὲς τῆς ὀλυμπίαζε θεωρίας. Docet nos HARPOCRATION, θεωροὺς dici τοὺς εἰς θεοὺς πεμπομένους, καὶ ὅλως τοὺς τὰ θεῖα φυλάττοντας, ἢ τῶν θείων φροντίζοντας: qui ad deos legabantur, vt et in vniuerſum, qui ea, quae ad diuinas res pertinent, cuſtodiunt et curae habent. Neque hic ſolum intelligendos eſſe, qui ad oracula mittebantur, diſcimus exemplis eiusmodi ſacrarum legationum, quae ad praeſens negotium maxime quadrant. Sufficiat vnum adduxiſſe, quod THVCYDIDES atque PLVTARCHVS deſcriptum reliquerunt, ille quidem libro III. hic in Nicia, vbi de inſula Delo luſtrata et antiqua religione inſtaurata agitur. Fuerat enim priſcis temporibus in hac inſula frequens circumuicinorum ex inſulis et continente Ionum conuentus, qui illuc

cum

cum vxoribus et liberis, colendi numinis cauſa, confluebant, ξὺν γυναιξὶ καὶ παισὶν ἐθεώρουν. Atque hi, priuata pietate confluentes aut ab vrbibus diuerſis miſſi, ne ſine ordine et decore ſacrum incompoſitum agentes, magis id turbarent, quam ornarent: opus erat aliquo cum auctoritate rem adminiſtrante, qui dicebatur θεωρίαν ἄγειν, dux eſſe omnium ad ſacrum deo peragendum miſſorum. Iſto ſenſu theorus in Delo tunc erat Nicias, cuius magnificum et religioſum munus multis verbis deſcribit PLVTARCHVS. Scilicet huius erat inter multos θεωροῦντας prouidere, vt omnia ordine et bene compoſito ritu peragerentur. HOMERVS, vbi *Iliad.* ά. deſcribit eiusmodi actum placando Apollinis numini deſtinatum, naui, quae theoros deduceret, imponit ἀρχὸν, praefectum, βουληφόρον, qui conſilio omnia moderaretur. Quo loco EVSTATHIVS bene annotat, non ſolum reſpici ad nauis gubernationem, ſed deſignari ἐπὶ πρεσβεία ςελλόμενον.

Iſtum vocabuli θεωρεῖν antiquiſſimum ac genuinum ſignificatum, a θεὸς et ὤρα, *cura*, deſcendentem videas ab interpretibus Graecorum librorum ſubinde non attendi, reconditumque ſenſum praetermitti. Vnico exemplo rem oſtendere ſatis ſit. In venuſtiſſimo IVLIANI libello, qui *Caeſares* inſcribitur, ita de Alexandro M. loquens inducitur Iul. Caeſar *pag.* 321. Ἀλέξανδρος Αἴγυπτον παρῆλθε θεωρῶν, ἐγὼ δὲ συμπόσια συγκροτῶν κατεπολέμησα. Duo docti interpretes reddiderunt, alter quidem, *Aegyptum ſpectans pertranſiuit*; alter *duntaxat aſpectans praeteriuit.* Neuter vim verborum expreſſit. Senſus hic eſt, Alexandrum Aegypti ampliſſimum regnum non bellatoris ritu

 aggreſ-

aggreſſum cepiſſe, ſed omnem expeditionem illam fuiſſe pompae religioſae, quam bello, ſimiliorem. Rem cognoſcet, qui ex ARRIANI hiſtoriarum libr. III. principium relegerit. Quoniam vero res ſeria erat cultum Deorum procurare: hinc Caeſar, vt ſe Alexandro maiorem oſtendat, a ſe inter conuiuia et compotationes ſubactam Aegyptum iactat. Mallem hoc loco legere περιῆλθεν, quod viſum etiam illi fuit, qui *pertranſiuit* interpretatus eſt. Nam *praeteriiſſe*, quod παρῆλθε valet, repugnat hiſtoriae et ſcopo loquentis.

Videndum nunc eſt propius, quid ſit ἡ Ὀλυμπίαζε θεωρία, qua Alcibiades functus dicitur. Iupiter Eleorum Olympius erat Graecorum omnium commune numen: quique ipſi quinto quoque anno recurrente habebantur ſacri ſollemnesque honores et ſacrificia, totius Graeciae nomine peragebantur: vtque omnes poſſent intereſſe, ab antiquo cautum erat, vt bellis, ſi qua gerebantur, induciae darentur. Confluebant autem illo tempore homines non ſolum priuata voluntate, vt totius Graeciae conuentum ſpectarent, et in illa hominum multitudine fructum aliquem ex mercatu perciperent: ſed ciuitates publico nomine mittebant, qui pompae peragendae et ſacrificiis ſuo nomine intereſſent. Qui autem cupiebant tam Olympiae, quam in ceteris ſacris, decertare, ſuaeque virtutis documentum dare, aliquot menſibus ante iuſtum tempus aduenire ſeſeque ſatis explorandos exhibere debebant. Atque haec lex adeo firma erat, vt ad decertandum nemo admitteretur, qui vel legitimo προαγῶνος tempore defeciſſet, vel fluente illo aliquid admiſiſſet, quod νομίμως ἀθλοῦντα dedeceret.

Erant

Erant itaque in eiusmodi ſacro et religioſo conuentu, (πανήγυριν vocare Graeci ſolent,) aliqui publico nomine a ciuitatibus miſſi, qui pompae partem conſtituerent et ſacris intereſſent: atque hi quidem θεωρεῖν ſtricto iure dicebantur; praeeratque illis publico etiam nomine miſſus θεωρίαν ἄγων. Hocque munus ſibi potiſſimum depoſcebant nobiliſſimi et locupletiſſimi iuuenes, qui magnifico ſplendore, quo hanc ſacram legationem ornabant, gloriam ſibi inter omnes Graecos et ſauorem ciuitatis parabant, vnde in honoribus petendis proueherentur. Sed et erant complures priuata pietate vel curioſitate huc adducti, vel mercandi potiſſimum deſiderio pertracti: quibus ſi theoriae honorem non adimere omnino licet; alio tamen, et latiori ſenſu tribuendum eſſe certum eſt. Tandem quoque erant coronae olympicae, variis certaminum generibus acquirendae, candidati; de quibus dubito, poſſintne theororum nomine decorari. Etſi enim ſpectacula, quae decertando edebant, numinum honori imputabantur, omninoque pars religioſi cultus erant: non memini tamen vllius auctoris, qui, de exercitatoribus iſtis agendo, illos in theororum numerum retulerit, aut verbo θεωρεῖν de illis vſus fuerit.

Erit itaque illa Ὀλυμπίαζε θεωρία, quam Alcibiades commemorat, vel publico nomine ciuitatis ſuae ſuſcepta legatio ad panegyrin Olympiae agendam: vel priuato eius ſtudio ad ſamam aucupandam, ſauoremque ſibi parandum ſuſcepta, et magnifico apparatu peracta peregrinatio. Quamquam enim nemo veterum nobis omnia, quae ad ſolemnia et toti Graeciae communia ſacra cum ludis coniuncta pertinent, deſcripta reliquit: videor ta-

men mihi certum habere, quod, inſtante huiusmodi ſacro omnibus id ciuitatibus publice fuerit ſignificatum: quae tam foederis, quo communi omnes continebantur, renovandi, quam iuris locique ſui tuendi et conſeruandi cauſa, ne ſuperſtitionis vim etiam commemorem, mittebant, qui publico nomine antiquis intereſſent ſacris et pro ipſa ciuitate deo, qui colebatur, ſacrificium afferrent. Si non aliunde id colligeremus, luculenter, puto equidem, cognoſceretur ex eo, quod THVCYDIDES Lib. V. Cap. 49. et 50. vt et PAVSANIAS Lib. Cap. ſcribunt, Lacedaemonios fuiſſe aliquamdiu per Eleos ab Olympicis ludis et ſacrificio prohibitos, quod mulctam ipſis irrogatam perſoluere noluerant.

Quum vero clariſſime id comprobare nequeamus, ponamus vtique, Alcibiadem priuato ſuo nomine Ioui Olympio, eiuſque ſacro, honorem hunc habuiſſe. Fauebit ita nobis tanto magis reliqua oratio illa, quam Thucydides, tamquam ab Alcibiade habitam, poſuit. Dicit enim nullum ante ſe priuatum, ἰδιώτην, ſeptem currus in certamen curule miſiſſe: moxque ſubiicit, non inutilem cenſeri debere illam inſaniam, ſi quis ſuis ſumtibus non ſolum de ſeipſo, ſed etiam de ſua patria bene meretur. Quanquam enim dicta haec ita ſe habent, vt non obeſſe poſſint, ſi quis velit adſerere Alcibiadem in theoria iſta obeunda patriae iuſſum habuiſſe; quoniam Athenis theoriae et choragiae a diuitibus ciuibus ſuo ſumtu fere peragebantur, idque genus muneris magis honor erat, quam poteſtas: porroque ἰδιώτης hic non opponitur homini aliquam publicam procurationem adepto, qua peracta in priſtinam conditionem redit; ſed ita in ciuitate aliqua eminenti, vt omnium rerum abſolutum habeat arbitrium: tamen in obſcu-

obſcuris et non clariſſime patentibus factis ſemper puto tutius in omnem partem diſpicere, et potius ordinaria, quam extra ordinem poſita, ſequi.

Eſto igitur Alcibiadem omnino priuatum ad Olympica certamina cum tanta pompa fuiſſe profectum. Fecit rem maiorum ſuorum exemplo congruam, deque ſuis facultatibus, ampliſſimis ſane, teſtantem. Annon in eo, per iuuenilem confidentiam, nimias impenſas fecerit, qui priuatus omnium regum omnem magnificentiam ſuperauit; parum quidem noſtra refert inquirere: ſed aemulos ita iudicaſſe, et rei publicae, ſi ipſius manibus permitteretur, male ominatos, peculatuſque eius praedicere auſos fuiſſe, palam eſt, ſiue Thucydidem legas, ſiue alia eius aeui momenta inſpicias: de quo plura dicam, quando de tempore quaeremus.

Nunc tempeſtiuum videtur de equeſtribus certaminibus in vniuerſum pauca delibare, vt tanto magis pateat, quonam magnificentia Alcibiadis potiſſimum cenſenda ſit. Quum multa et celebria eſſent per Graeciam ludorum, honori deorum conſecratorum, genera; eminebant tamen plurimum illae, quae genti vniuerſae Graeca lingua vtenti communes et ſacrae habebantur, πανηγύρεις ſeu conuentus ad Olympiam, Nemeam, Iſthmum et Delphos. Poſt ſacrificia, ad quae ſolemni pompa procedebant, ludi inſtituebanrur omnis generis, gymnici, equeſtres, muſici: erantque iudices conſtituti, quorum ſuffragiis, qui victoriam adepti eſſent, coronam accipiebant et coram vniuerſo coetu praeconis voce declarabantur. Neque contemnenda erat gloria, quam gymnicorum certaminum victor conſequebatur: nec exigua erant emolumenta, quae cuique

in

in patriam ſuam reuerſo praebebantur. Nam quum ciuitas quaelibet ſe ipſam in ciue ſuo coronari exiſtimaret: non ſolum honorifice eum reuertentem excipiebat, verum etiam inter primarios ciues locum ipſi faciebat, cenſumque equeſtrem, ſi non antea ſuppeteret, ex publico collatis opibus, explebat, et alimenta per omnem vitam, cum plena immunitate, praebebat. Nihil itaque mirum eſt, quod omnis Graecia, deſiderio tantorum fructuum incenſa, illis exercitationibus inſano ſtudio dedita fuit, quibus praeparari debet, qui ſe vult certaminibus huiusmodi committere. Cumque ſubinde accideret, vt homines tenuiſſimi, vel celeritate vel corporis robore pollentes artisque praeceptis adiuti, victoriam currendo, luctando pugillandoque reportarent, ſubitaque conuerſione fortunae emergerent: coeperunt nobiliores homines gymnica illa vituperare et ab iis fere abſtinere, tanto autem magis operam dare equeſtribus ſeu curulibus certaminibus, in quibus non cum plebeiis antagoniſtis, ſed cum regibus, ciuitatibus et nobiliſſimo ac ſpectatiſſimo quoque de palma certandum erat. Nam τὸ ἱπποτροφεῖν, equos alere, regium olim cenſebatur: atque qui inter ciues poſſent equum in bellicos vſus paratum ſemper habere, digniores omnino ceteris habebantur.

Habebant autem haec curulia certamina multum, quod a gymnicorum more et inſtituto recedebat. Nam non ſolum equeſtre ſtadium diuerſum erat ab illo, quo athletae gymnicae artis ſpecimina edebant: verum hoc maxime diſcrepabat, quod athleta proprii corporis robore, agilitate, patientiaue coronam ſibi quaerebat: hic autem equi, forte etiam muli, domino longiſſime abſenti

pal-

palmam acquirebant. Mittebant enim reges et principes, vt et reginae claraeque feminae, equos curruſque, addebantque peritos ἡνιόχους, agitatores, neſcio an aurigas Latine appellare liceat. Victoriam conſequebatur currus illius, equorumque currum vehentium dominus, qui metam feruidis euitando rotis ceteros anteuerterat, currumque cum omni apparatu eius integrum ſaluumque per tot decurſiones conſeruauerat: aut ſi equi ſine curribus cum ſeſſore mitterentur, qui celeritate reliquos poſt ſe reliquerat.

Iſti ἡνίοχοι ſeu agitatores apud Graecos minime erant ſeruilis aut abiectae conditionis homines, verum iuuenes nobiliſſimi, et plerumque eorum, qui equos miſerant, propinqui, certe amici, quorum fidei et dexteritati tantam ſpem ſuam confidere ſe poſſe credebant. Hi quemadmodum palmae honorem permittebant equorum curruumque dominis: ita ab illis honorem ſibi habendum et quicquid remunerationis loco eſſe poterat, exſpectabant. De quo plura non inueni, quam quod is, qui victoriam per ipſos acceperat, publice eos coram omni ſpectatorum concione vitta quadam exornare fuerit ſolitus. Quo autem pacto, et per quos id fecerint abſentes victores, (ſaepe enim longiſſime illi aberant, vt Cyrenaici et Siculi reges) me non inueniſſe profiteor; coniecturis autem indulgere non iuuerit.

Atque ſic intelligi poteſt, quid ſibi velit, quod in Alcibiadis laudem ceciniſſe poetam ſcripſit PLVTARCHVS, cum βῆναι ἀπονητὶ στεφθέντα, *abſque labore coronam ipſum abſtuliſſe*; quoniam nihil niſi ſumtus fecerat, agitandi autem quemuis currum laborem τοῖς ἡνιόχοις permiſerat.

Quid autem ſibi vult, quod idem vates, ſiue EVRIPIDES is fuit, ſiue quiſquis alius, δὶς ςεφθέντα, bis coronatum Alcibiadem dixit? Certe in Olympicis, omnibusque ſacris certaminibus, in quouis decertandi genere tantum vnicus erat, qui victoriam, eiusque ſignum coronam, accipiebat: et omni antiquitati, ipſique ſacro codici fidem derogant, qui ſecus ſtatuunt. Confundunt autem certamina θεματικὰ, quae lucratiua erant, cum ſacris: et quod ibi tria quatuorue praemia, aut quinque adeo erant, male transferunt ad ſacra certamina. Cuius grauiſſimae aberrationis dux et auctor eſſe mihi videtur vir ſane doctiſſimus et diligentiſſimus PETRVS FABER, qui ſi tam bene digeſſiſſet τὰ ἀγωνιστικὰ, quam ſedulo congeſſit ad hoc argumentum pertinentia, forte nihil aut parum reliquiſſet eorum induſtriae, qui poſt ipſum ad hunc antiquitatis campum progreſſi ſunt. Omni autem modo contendit perſuadere nobis, quod fuerint in omni certaminum genere propoſita prima et ſecunda et tertia praemia, vt qui eſſet primis excluſus, non tamen his minoribus defraudaretur, cuius aliquod meritum prae ceteris poſt victorem antagoniſtis fuiſſet. Id vero vt comprobet, inter alia adducitur etiam pro teſtimonio Alcibiadis exemplum. Vnde operae pretium facturus videor, ſi hanc rem accuratius perpendero.

Mentem ſuam de pluribus praemiis propoſitis multis quidem locis, ſed clariſſime ediſſerit Lib. III. pag. 309. „vbi haec legimus: praemii nomen ſimpliciter et ſine „adiectione prolatum ſoli primo competit, ſicut et bra„bii, quod vnus tantum merebatur aut accipiebat, qui „victor a praecone palam renunciatus foret.„ Ibidemque

caput

caput ſequens ſic orditur: „Ergo prima et ſecunda et „tertia praemia fuiſſe propoſita, vt qui eſſet illis excluſus, non tamen hiſce defraudaretur, cuius aliquod meritum prae ceteris poſt victorem antagoniſtis foret, perſpicue ac eleganter Philo admonet, cetera. Alcibiadis autem exemplum Fabro omnis inſtar probationis videri, cum ex *pag.* 167. patet, vbi ipſum Olympici certamiminis primum ſecundum ac tertium victorem fuiſſe renunciatum ſcribit; tum ex *pag.* 316. vbi legimus admodum multa ad Plutarchi de Alcibiade narrationem expediendam pertinentia. Serio itaque credit Alcibiadem iſtis ludis Olympicis reportaſſe plura vno praemia: ſcilicet primum, qud proprie βραβεῖον vocatum ſit, deinde ſecundum et quartum ex mente Thucydidis, ex aliorum autem teſtimonio tertium.

Conficitur inde, quod ex mente clariſſimi ICti minimum quatuor praemia fuerint tunc temporis propoſita, quae acciperent primus, et qui a primo optimam et feliciſſimam operam nauaſſent, vſque ad quartum. Eandem opinionem fouent complures alii, quorum ex numero adducere ſufficiat ANDR. DACERIVM, Plutarchi nouiſſimum interpretem, qui in nota 28. iſti loco ſubiecta id clare adſerit, probationiſque loco prouocat ad HOMERVM, apud quem nos Olympicorum ludorum ante inſtitutos Olympiae ludos ideam iubet requirere. Enimuero haec eſt, ſi quicquam aliud, inſignis confuſio ludorum thematicorum, vbi pro praemio lucratiuo certabatur, et ſacrorum certaminum, vbi praeter coronam victori glorioſam nihil tribuebatur in loco certaminis. Illa autem non niſi vni dabatur, qui conſpicue ſuperaſſet

 omnes

omnes aemulos. Omnia apud Homerum ſcripta et decantata certamina fuerunt priuata, a munificis heroibus inſtituta vel populum delectandi cauſa, vel in honorem defunctorum, quorum funera condebantur. Sacra totius Graeciae certamina vigebant publico totius gentis decreto, atque omnino alia habebant ſtatuta, longeque illuſtriora praemia. Ideam certaminum gymnicorum, quae Nicocles patri defuncto inſtituit, ex Homero licet capere; fuere enim et haec lucratiua; forte etiam plerorumque, quae per vrbes Graecas agebantur magno ſane numero: ſed Olympia, Pythia, Nemea et Iſthmia, vtpote vniverſae gentis conſenſu pro ſacris reputata, non licet Homerico pede metiri: certe non licet ab illo tempore, quo fuerunt vniuerſae gentis conſenſu communes omni Graeciae et στεφανίται facti, id eſt, pro omni praemio ſerti cuiusdam honore remunerari coeperunt.

Iam propius inſpiciendus eſt Alcibiades victor, et praeterea ſecundus et quartus a victore, forte etiam tertius. Videtur doctiſſimus FABER *pag.* 316. rem ita animo ſuo concepiſſe, tamquam magnificos Alcibiadis apparatus et curruum ac equorum praeſtantia ita omnes deterruerit, vt nemo decertare auſus fuerit: vnde factum ſit, vt ipſi ſine controuerſia debuerit corona tribui, vna cum praemiis, quae a victore proximis erant auferenda. Atque ex hac cauſa videtur Thucydidem, qui omiſſa tertii mentione, quartum a victore fuiſſe ſcripſerat, reliquiſſe, ipſique ſequiorum aetate et auctoritate ſententias praetuliſſe. Nam videbat neceſſarium eſſe, vt fuerit alius, qui tertio loco Alcibiadis currum ſuperauerit, vt continuata ſerie palmarum excideret.

Rei

Rei indolem conſideranti clarum fit, fieri non potuiſſe, vt vnus Alcibiades ſeptem ſuos currus, quos ad certamen miſerat, regeret. Si omnino ipſe per ſe decertauit, non niſi vnius currus eſſe potuit ἡνίοχος. Sed exemplum deſidero, quo probetur, quod vmquam dominus equorum et curruum ad ſacra certamina miſſorum ipſemet eos agitauerit. Videtur de eo non dubitaſſe DACERIVS, qui ad Plutarchum nota 29. aſſerit, Alcibiadem illas tres palmas, de quibus Euripides ibi citatus loquitur, per ſe meruiſſe: deinde autem abſentem bis viciſſe. Sed mihi non perſuaſerit, rem ita, vt perhibet, habuiſſe, aut habere potuiſſe. Equidem exiſtimo in equorum decurſionibus et bigarum quadrigarumque agitationibus idem obtinuiſſe, quod in hominibus ſtadium decurrentibus conſtitutum erat. Hos, docente PAVSANIA Libr. VI. Cap. 13. non turmatim emittebant, ſed ſimul quatuor, quos ſors primos deſignauerat, decurrebant. Hos inter qui primus virtute fuerat, dicebatur προτερήσας, aut κρατήσας, habebatque vnus ſpem præmii, reliquis tribus, qui vna cum illo decurrerant, ſed victi ab eo fuerant, ab vlteriori ſpe omnino deiectis. Poſt hos quatuor decurrebant totidem ſequentes: et ſic deinceps res peragebatur, donec omnes decurrerant; ſemper diſcedentibus, qui poſtremi fuerant. Iam his προτερήσασι, ſeu victoribus in prima decurſione, nouum inſtabat certamen, vt tamdiu quaterni decurrerent, donec deficientibus aliis atque aliis vnus aperte victor conſpiceretur. Rem ita, vt diximus, in curuli etiam certamine, vt de pedeſtri certum eſt, habuiſſe, perſuadet Romanorum in circo au-

rigantium exemplum : vbi non niſi quatuor ſimul currus emittebantur.

Iam is, qui aperte tandem ſuperauerat omnes, victor vnus declarabatur : qui vltimus cum victore certauerat, ſecundus ab eo habebatur, tertius autem et quartus, qui, ceteris iam omnibus ſuperatis ſpem victoriæ retinuerat, vsque dum ex multis tantum quatuor ſupereſſent, qui ſecum de victoria pugnare debebant ; quod vltima et decretoria decurſione fiebat.

Si igitur, ex Thucydidis narratione, Alcibiades vicit, et ſecundus ac quartus fuit, neceſſarium eſt tandem, vbi numerus curruum ad quatuor redactus fuit, primum ſecundum et quartum currum Alcibiadis fuiſſe, vnum autem tertium Alcibiadis non fuiſſe. Etiam hoc aperte colligitur, illa eadem Olympiade, qua Alcibiades victor diſceſſit, minimum fuiſſe currus ſedecim, qui victoriae cauſſa decertauerunt. Neque obſcurum eſſe poteſt fieri omnino non potuiſſe, vt Alcibiades illas tres palmas per ſe mereretur : quum in vltima miſſione tres omnino currus ipſius eſſent, quorum non niſi vnius ἡνίοχος eſſe poterat.

Atque adeo locus ille minime probat Alcibiadem tria præmia fuiſſe conſequutum. Vnicum, ſcilicet νίκην, gloriam victoriæ, et coronam, victoriæ inſigne, meruit et conſequutus eſt, ſiquidem vno tantum curulis certaminis genere expertus fuit. Sed ad præſtantiam equorum, omnisque apparatus curulis, referebant homines, quod præter illum currum, qui victoriam reportauit, alter proxime, tertius non longe ab ea abfuerit Sic olim admirationi fuit, quod in vna Olympiade ſeptem Crotonienſes

nienſes in ſtadio decurrendo fuerunt προτερήσαντες: quoniam ex nulla alia gente Græciæ vno tempore tot viſi fuerunt, qui alios prima ſtatim decurſione a ſpe vlteriori deiicerent. Sed propterea non fuere illico omnes coronati, vt aliqui incaute perhibuerunt: verum debuerunt hi ſeptem Crotonienſes, ac ſi præter illos ex aliis ciuitatibus aliqui fuere προτερήσαντες, inter ſe tamdiu certare, ſtadium identidem decurrendo, donec laſſatis ceteris inuicta vnius virtus manifeſte cognoſceretur: qui vnus coronam ſtadii conſequutus eſt.

Redimus ad Alcibiadem, de quo nunc omnia ſatis videntur plana, praeter illud, quod poeta toties dictus illum bis ſerto oleagineo, id eſt Olympico coronatum perhibet. Vidimus quid erudito Dacerio placuerit, ſcilicet quod poſt olympicas tres palmas, duas praeſens retulerit, bis deinde abſens coronatus fuerit. Atque id ipſi propterea maxime videtur, quod dictum eſt δὶς στεφθέντα ἀπονητὶ. Putat igitur triplicem palmam non ſine magno fuiſſe labore partam, quia ſeptem currus agitare debuerat; ſed alio tempore ipſum abſentem ſine moleſtia et ſudore proprio honorem meruiſſe. Enim vero non poſſum cum docto viro ſentire etiam de binis coronis alio tempore partis. Non enim video quid impediat, quo minus in una eademque Olympiade duas coronas ab equeſtribus certaminibus referret: bene autem video, quod poeta non loquatur de re diuerſis temporibus, ſed ſimul geſta. Scilicet non vnius eiuſdemque generis erant currus, qui in certamen mittebantur; ſed admodum diuerſi: vt bigae, quadrigae, ſeiuges, octoiuges: de quibus dicendum eſſet, ſi omnem rem curulem expli-

explicandam ſuſcepiſſemus. Singulis autem generibus licebat victoriam contingere. Adeoque Alcibiadi, ſi diverſis curruum generibus ad certamen acceſſit, via ad diverſas victorias, earumque praemia, coronas patuit: nihilque opus eſt contendere, quod diuerſis ludis eas quaerere, adeoque annis interiectis, debuerit.

Atque ſic, ſpero equidem, ſatis expedita erunt omnia, quae ad Alcibiadem Olympiae curuli certamine vincentem pertinent. Enimuero ſuperſunt aliquae quaeſtiones de loco et tempore, quibus nunc expendendis operam dabimus. Praeter illa ſollemnia Olympia, quae Ioui apud Eleos quinto quouis anno recurrente ab omni Graeca gente celebrabantur, erant Olympia minus celebria, ab Athenienſibus et Macedonibus certis fixisque temporibus agi ſolita in Iouis Olympii honorem. Ad horum aliqua victoriam Alcibiadis reiicit vir doctiſſimus IOSVA BARNES in Euripidis vita, pagina XXVIII. „his verbis: Archelaus rex Macedoniae adeo gloriae ar„dore incaluit, vt olympica certamina in Dio Macedo„niae inſtitueret, quae reſpectu Olympiorum in Elide „dicta erant Olympia minora: quod et Athenienſes ante „eum feciſſe dicuntur: in quibus Alcibiades ter victoriam „reportabat; nec enim is ſemel maiora Olympia viciſſe „deprehenditur. Adſcripſi verba auctoris, quoniam obſcurum videtur, Macedoniisne an Athenienſibus Olympiis victorem addicat Alcibiadem. Mihi quidem vero videtur ſimillimum, Barneſium mentionem Athenienſium per modum parentheſeos tantum facere, et referre Alcibiadem ad Macedoniorum ab Archelao inſtitutorum ludorum victores, quoniam totus, qui ſubſequitur, ſermo de hoc

hoc rege tantum agit. Equidem video, cur vir de bonis litteris praeclare meritus Alcibiadis victoriam maluerit ad Macedonas referre, quam ad celeberrima apud Eleos Olympia: quia ſcilicet nulli Olympionicarum faſti Alcibiadem victorem Olympiae commemorant. Vereor autem vt ipſi acciderit, quod pluribus videmus, qui ſe vni dubitationi exemturi in longe magis dubia et obſcura coniiciunt.

Quaeſtionem primariam deinde agitabimus: nunc iſtud modo dicam, fuiſſe prius Barneſio deliberandum aut potius probandum, in Olympiis illis Macedonum fuerintne ludi curules inſtituti, et an exteri ad illa inuitati aut admiſſi fuerint. Mihi certe antiquos cum cura excutienti neutrum horum ſeſe offert. Nam vbi DIODOR. SICVL. Libr. XVII. commemorat hos ludos ab Alexandro ante expeditionem in Aſiam peractos, his abſoluit narrationem: *θυσίας μεγαλοπρεπεῖς τοῖς θεοῖς συνετέλεσεν ἐν Δίῳ τῆς Μακεδονίας, καὶ σκηνικοὺς ἀγῶνας Διῒ καὶ Μούσαις, οὓς Ἀρχέλαος ὁ προβασιλεύσας πρῶτος κατέδειξε.* En ſacrificia et ludos ſcenicos, non gymnicos, nedum curules, in Iouis et Muſarum honorem, eoſque ipſos illos, quos Archelaus quondam inſtituit. De eadem re loquens ARRIANVS haec habet: *τῷ τε Διῒ τῷ Ὀλυμπίῳ τὴν θυσίαν, τὴν ἀπ' Ἀρχελάῳ ἔτι καθεστῶσαν ἔθυσε, καὶ τὸν ἀγῶνα Αἰγαῖς διέθηκε τὰ Ὀλύμπια.* Nihil hic etiam niſi ſacrificium Ioui Olympio et ludum ab Archelao inſtitutum, id eſt ſcenicum, narrat. Erat hoc ſacrum initio ſuo datum vrbi Dio, ad radices Olympi montis ſitae, vnde Ioui Olympio nomen: et quia huic Ioui ac Muſis dedicatum erat, Olympium a potiori

voca-

vocabatur ſacrum. Videtur autem non adeo adſtrictum vrbi fuiſſe: quia Arrianus certamen illud ſcenicum Aegis, id eſt Edeſſae, regia ſcilicet Macedonum vrbe, peractum teſtatur: in quo diſcrepat a Diodoro, qui Dium diſerte ponit. Forte ſic conciliandi erunt, quod ſacrificium Dii in templo Iouis Olympii peractum, ludi autem, maioris commoditatis cauſa in ipſa ſede regia, omni neceſſariarum ad magnificentiam et decus rerum copia magis affluente, inſtituti fuerint.

Alterum, de quo propter Alcibiadem dubito, hoc eſt, fuerintne exteri ad illud ſacrum inuitati et admiſſi. Certe Diodorus copiarum tantum duces et amicorum praecipuos initio commemorat: deinde autem in recenſendo conuiuii apparatu σκηνὴν ἑκατοντάκλινον, tabernaculum magnificum, centum conuiuas capiens, vbi neceſſarios, ducesque et ciuitatum legatos excepit; ſcilicet qui tunc miſſi ad eum venerant, vt de bello Perſis communi Graecorum nomine inferendo deliberarent. Idem DIODORVS, vbi Lib. XVI. recenſet magnificum apparatum, quo Philippus, pater Alexandri, nuper dux belli in Perſas ſuſcipiendi declaratus legatos et hoſpites Graecos ſtudioſe inuitatos exceperit, nuptialique feſto filiae admouerit; quo omnem beneuolentiam erga Graecos atque ſimul ſplendorem aulae ſuae oſtentare cupiebat, ludos ſcenicos et muſicos tantum, nullos autem gymnicos et equeſtres indicat: prorſus vt dubitandi iuſtus locus ſit, vmquamne Macedones certamina curulia apud ſe inſtituerint.

Quod Athenis Olympia fuerint, neutiquam dubitari poteſt, quum multis teſtibus id conſtet. At vero inſolens eſſet vel ſuſpicari, quod curule certamen in illis fue-

fuerit propoſitum: quare nihil hic addi opus videtur.

Progredior tandem ad tentandas vires in requirendo tempore, quo Alcibiades Olympia viciſſe cum maxima veriſimilitudine dici poſſit. In quo fateor non parum eſſe obſcuritatis, poſtquam eorum ſcripta interciderunt, qui curioſe annotauerunt, quis in quouis certaminum genere victoriam in Olympicis certaminibus reportauerit. Tale fuit opus PHLEGONTIS TRALLIANI, cuius ſpecimen nobis conſeruauit PHOTIVS *Cod.* XCVII. vbi recognoſcimus illos, qui per ſingula certaminum genera victores fuerunt Olympiade CLXXVII. Adſcribam particulam eorum, quae ad curules coronas pertinent, quas tunc meruerunt Ariſtolochus Eleus τεθρίππῳ, Agemon Eleus κέλητι, Hellanicus Eleus συνωρίδι et πωλικῷ τεθρίππῳ, Cteſias Eleus πωλικῇ συνωρίδι, Callippus Eleus πωλικῷ κέλητι.

Id vero Phlegontis opus integrum exſtare, eſſeque id ipſum, quod SCALIGER cum Graecis EVSEBII chronologicis edidit, docti viri fruſtra omnino contendunt aduerſus ipſum Scaligerum, ingenue ad calcem notarum ſuarum profeſſum, quod illam Ὀλυμπιάδων ἀναγραφήν, quam poſt NICEPHORI patriarchae chronographiam dedit, quaeque prior pars eſt τῆς συναγωγῆς ἱστορικῆς, partim ex editis, partim ex nondum editis ſcriptoribus collegerit. Neque argumento eſſe poteſt, quod Phlegontem hic habeamus, quia ad Olympiadem 177. legimus ea, quae ex Phlegonte Photius excerpta pro ſpecimine illius operis dederat: nempe apud Photium lecta in ſuum ſcriptum tranſtulit Scaliger: perinde vt GVIL. LLOYD in ſua ſerie chronologica eidem Olympiadi eoſdem victores

adſcripſit. Quemadmodum vero anni iſtius vbertas cum praegreſſorum et ſubſequentium ſterilitate collata differentiam notabilem ipſis oculis ingerit; ſic ad cognoſcendum, quod Phlegontei operis exiguae miculae ſuperſint, nulla re opus eſt, quam Photii indicio et iudicio. Vitio enim dat auctori nimiam diligentiam, quin putidam accurationem in ſingulis Olympiadibus percenſendis, ſingulorumque certaminum nominibus et rebus geſtis, atque ipſis etiam oraculis referendis, qua non poſſit non taedium lectori adferre, dum per eam reliqua omnia in hoc libro obteguntur, neque apparere ſinuntur. Certe nemo erit, qui in illa, quam manibus terimus, Scaligerana Ὀλυμπιάδων ἀναγραφῇ illam a patriarcha Photio reprehenſam curioſitatem nimiam, aut qui, reſponſa oraculorum ſuperſtitioſius collecta, notandi cauſam inuenerit. Atque vtinam eſſet nobis integer conſeruatus hic Phlegon: nam ſi habuiſſet, utique quae non iuuare patriarcham poſſent, ſuppeditaret certe, antiquitatum et hiſtoriarum minuta quaerere ſubinde coactis, innumera, quae indagationem eorum nunc fruſtrantur. Certe conſpecto Alcibiadis nomine in victorum curulis certaminis indice non cogitatum fuiſſet de Olympiis Macedoniis, quod Alcibiadi tantam gloriam attulerint.

Sed redimus in viam, quaeſituri annum, quo Alcibiadem Olympiae victorem citatum fuiſſe veroſimile ſit. Neceſſarium eſt vtique illum eſſe ante belli Peloponneſiaci annum XVII. a nobis requirendum: illo enim, qui Olympiadis LXXXXI. primus erat, habita eſt illa oratio Alcibiadis, cuius argumentum nobis diligentiſſimus et coaeuus ſcriptor THVCYDIDES refert, et vnde huius diſquiſitionis argumentum ſumſimus. Nimis itaque aperte hallu-

hallucinatur optimus PET. FABER, qui annum, quo apud Eleos vicerit Alcibiades, eundem eſſe ſcribit, quo ἡ τελεία συνωρὶς in Olympicis ludis primum recepta fuit. Id enim, teſte illo, quem ipſe adducit, DIODORO SICVLO Libr. XIII. cui plures adſtipulantur a GVIL. LLOYD in *ſerie chronol.* laudati, accidit Olympiade LXXXXIII. adeoque poſt octo annos ab illa concione tranſactos. Erit itaque nobis fere tantundem, quam is deſcendendo aberrauit, adſcendendum, vt deducamus ad veram illam, aut veroſimillimam Olympiadem, qua victoria tam inſignita fuit reportata.

Parum quidem accurate de annis tanti viri ſcripſerunt veteres, de quo in aliis tam minuta conſectati ſunt, vt et eius nutricem nomine ſuo denotauerint. Referam tamen, quae mihi indaganti ſeſe obtulerunt. Nicias, qui Alcibiadi maxime aduerſabatur, in oratione illa, qua ipſum tantopere irritauit, inter alia, iuuentutem de republica conſultando et imperio capeſſendo imparem obiecerat. THVCYDIDES etiam vbi Libr. V. refert quam callide res miſcuerit, vt bellum cum Lacedaemoniis nuper compoſitum redintegraretur, ita illum deſcribit, quod fuerit ἀνὴρ ἡλικίᾳ μὲν ἔτι τότε ὢν νέος, ὡς ἐν ἄλλῃ πόλει, ἀξιώματι δὲ προγόνων τιμώμενος. vir valde tunc iuuenis, ſi ex aliarum vrbium moribus iudicandum eſſet, cui tamen claritas maiorum auctoritatem faciebat. Scilicet olim Athenis conſtitutum fuerat, vt non niſi L. annis maiores in concionibus ſententiam de republica dicerent: ſed Alcibiadi fauor populi multa concedebat, quae aliis non aeque indulgebantur. Hoc autem accidit quarto ante illum anno, quo ſe Niciae debebat obiicere,

 belli

belli autem Peloponneſiaci duodecimo. Pugnae cum Potidaeatis, quae ante hoc tantopere celebratum bellum altero anno accidit, admodum adoleſcens intererat, manifeſto periculo tunc per commilitonem Socratem ereptus. Non poſſumus vtique eum minorem XVIII. aeſtimare, quod tempus minimum erat, quo adoleſcentes militare incipiebant. Atque hoc aſſumto conſequitur Alcibiadem vix quatuor annos natum fuiſſe, quum pater eius Clinias Olympiadis LXXXIII. anno ſecundo apud Coroneam fortiter pro patria pugnans decederet, ipſumque tutorum curae relinqueret.

Iam ſi cogitamus immanes ſumtus, quos Alcibiades fecit equis alendis, et memorabilem profuſionem in ſacrificiis et epulis praebendis, de quibus apud PLVTARCHVM in vita eius et ATHENAEVM dipnoſoph. libr. XII. ex ſcriptoribus coaeuis refertur: vix alicui videbitur fieri potuiſſe, vt Alcibiadi ſub tutoribus conſtituto integrum fuerit tantas impenſas facere: praeſertim ſi conſideretur, non ſolum ad Olympia illum equos ſuos et currus miſiſſe, ſed alia etiam ſacra certamina adiiſſe et inde coronas abſtuliſſe: quod de Nemeis ſatis certum eſt ex PAVSANIA lib. I. cap. XXII. Oportet igitur id tunc demum accidiſſe, vbi iam ſui iuris fuit et tutelam exceſſit: quod legibus veterum Atticorum aliquanto ſerius, quam apud Romanos, videtur factum. Nam quum hi tutela pupillum dimitterent decimo et quarto aetatis anno peracto, eidem tamen curatorem bonorum vsque ad viceſimum et quintum adiungerent; ne per lubricum aetatis rem a parentibus relictam diſſiparent: curatores equidem apud Graecos non inuenio datos, ſed tutelam

ad

ad annos decem et octo productam. Clare hoc apparet ex DEMOSTHENIS orationibus in Aphobum, quibus tutores ſuos ad iudices defert, patrimoniique ſui admodum male adminiſtrati reos agit. Si itaque Alcibiades decem et octo annos natus tutela exiit, et militare patriae ſuae moribus eodem tempore coepit, atque ſe equeſtribus exercitationibus tradidit; potuit vtique tantum in iis progredi, vt Olympiade LXXXIX. profectibus ſuis aliquantum confideret et periculum eorum facere auderet: quo tempore viceſimum ſeptimum annum egiſſe eum colligo.

Atque me non multum forte aberrare in hoc anno deſignando vel illud maxime perſuadet. quod inuidiae in Alcibiadem publice tunc exſurgentis ob illam equeſtris rei gloriam clara documenta exſtant. Illo enim anno ARISTOPHANES produxit comoediam, quae *Nubes* inſcribitur, qua Socratem, Alcibiadi cariſſimum virum, ita traducit, vt manifeſte mordeat Alcibiadem, cuius etiam matrem et genus aperte inſectatur, et ab illo inſano equeſtris rei ſtudio multa reipublicae mala extimeſcenda proponit. Quemadmodum autem fumus ignem, ſic inuidia gloriam prodit: haec autem tam euidentia eius documenta in hominem tam nobilem et potentem edita, cauſam ſane magnam, a qua irritata et excitata fuerit, debent nobis indicare.

Neque obſtare huic ſententiae noſtrae poteſt, quod illo anno Alcibiades in caſtris ad Delium Boeotiae degit. Is enim ſacris ludis honor habebatur, vt, quando inſtabant, induciae inter vrbes bellum gerentes publico conſenſu denunciarentur, vt cuiuis ad eos conuentus abire volenti nihil obſtaret, quo minus ſecure commodeque adire

ire illos et ab iis Poſſet diſcedere. Si vero alicui dubium ſit, an propter inducias illas militibus ſuis imperatores permiſerint diffluere et a ſignis tam longe diſcedere: aliud omnino ſuccurrit ex THVCYDIDIS accurata deſcriptione. Fuit enim ſero demum auctumno raptim et ſubito ſuſcepta, et potius repentina irruptio, quam iuſta et prouide inſtituta expeditio, cuius propterea ſucceſſus conceptae ſpei minime reſpondebat.

Atque haec puto ſufficere ad intelligendum, nullam eſſe neceſſitatem victoriam Alcibiadis Olympicam ad Macedonas ab Eleis transferendi; quod doctiſſimo BARNESIO viſum fuit: et quod PETRVS FABER in illius victoriae deſcriptione nullum ſine perſuaſionis de pluribus pretiis ſingulorum certaminum victoribus propoſitis praeſidium ponere debuiſſet. Haud equidem ſpero fore vt aliquis credat, magnas Fabro ſuppetias ferri a ſcholiaſtae Thucydidei auctoritate, qui verba ſui ſcriptoris, *ἐνίκησα δὲ καὶ δεύτερος καὶ τέταρτος ἐγενόμην*, ita exponit: *ἐνίκησα τά τε πρῶτα, καὶ τὰ δεύτερα, καὶ τὰ τέταρτα.* Hunc locum videas vere ita intellectum a doctis viris, vt tria praemia Alcibiades reportauerit, ſummum ſcilicet, ſeu *βραβεῖον*, minus aliquod ſed ab ſummo proximum, et denique minimum, quod quartum fuit. Enimuero ſalua res eſt. Vere vicit Alcibiades *τὰ δεύτερα* et *τὰ τέταρτα*, et is, qui in decretorio illo certamine tertius fuit, vicit *τὰ τρίτα*. Hoc eſt vicerunt quiſque in ſecunda, tertia et quarta *τάξει*. Sed debebant hi victores inter ſe porro decertare tam diu, donec vnus omnes reliquos manifeſte viciſſet. Atque vnus is fiebat Olympionica eius certaminis, in quo omnes antagoniſtas vicerat. Clariſſima ſunt verba PAVSANIAE Libr.

Libr. VI. Cap XIII. *οἱ δ' ἂν ἐν ἑκάςῃ τάξει κρατήσωσιν, ὑπὲρ αὐτῶν αὖτις θέουσι τῶν ἄθλων.* Atque *νικας*, id eſt victorias, eos retuliſſe, qui in claſſe ſua priores aut ſuperiores fuerant, minimeque abhorruiſſe veteres ab hac loquendi ratione, id clariſſime apparet ex IVLIANI Caeſaribus, qui ita loquitur: *ὁ τοῦ τὰς πολλὰς ἀνελομένου νικας κρατήσας, ἑνὸς περιγενόμενος, οὐδὲν ἔλαττον δοκεῖ κακείνων γεγονέναι κρεισσων, οἱ προσεπάλαισαν μὲν οὐδαμῶς αὐτῷ, τοῦ κρατηθέντος δὲ ἥττους ἐγένοντο.* Quin videmus adeo numeratas fuiſſe palmas, quas victor multorum *προτερησαντων* reportaſſet. Reuera enim is auferebat illis victorias, quarum cauſa coronari debebant, ſi pauciores competitores coronae fuiſſent, aut res tranſigi paucioribus decurſionibus potuiſſet. Proinde tamen non multiplicabantur coronae, non augebantur praemia. Vnum enim erat, quod omne pretium complectebatur, praemium, corona et vox praeconis, quae publice victorem illum vnum declarabat.

Quoniam in hac controuerſia diiudicanda non parum pendet a temporis rationibus recte poſitis; ad eas digerendas animum quam maxime adieci. Eſt autem obſcurum, quo anno natus Alcibiades fuerit: quo vero obierit, a DIODORO SICVLO clariſſime notatum inuenio. CORN. NEPOS obiiſſe ipſum ſcribit annos circiter quadraginta natum: quod fieri omnino nequit, vt admittamus. Eſſet enim neceſſarium vt natum crederemus aliquot poſt patris ſui obitum annis, et decennem admodum prima ſtipendia meruiſſe. Aut igitur anni in illa vaga determinatione ſupra quadrageſimum plures intelligendi erunt: aut pro quadraginta, qui nunc leguntur,

tur, Nepos quinquaginta ſcripſit : a quibus certe tunc prope abfuiſſe Alcibiadem, quum vita decederet, omnis hiſtoria confirmat. Suppono ipſum, quum prima ad Potidaeam ſtipendia faceret, annos XVIII. habuiſſe; quod legibus Athenienſium conuenire exiſtimo: atque hoc aſſumto conſequitur, Olympiade LXXXII. Alcibiadem in lucem editum fuiſſe : aut certe ante Olympiadem LXXXIII. Subiiciam itaque chronologiam Alcibiadis, auctorum idoneorum teſtimoniis confirmatam.

Olym-

Olympiad.	Anno	
LXXXII.	1	
	2	
	3	
	4	
LXXXIII.	1	
	2	Athenienſes ad Coroneam infeliciter pugnant *Diod. Sicul. Libr. XII.* In hoc praelio Clinias pater Alcibiadis cecidit. *Plutarch.*
	3	
	4	
LXXXIIII.	1	
	2	
	3	
	4	
LXXXV.	1	
	2	
	3	
	4	
LXXXVI.	1	
	2	Pugnatur ad Potidaeam. *Diodor. Sic. Libr. XII. pag.* 305.
	3	
	4	
LXXXVII.	1	Iterum pugnatur ad Potidaeam. *Diod. Sic. Libr. XII. pag.* 305. Alterutri pugnae Alcibiades tunc admodum adoleſcens intererat, manifeſto periculo per Socratem contubernalem ereptus. *Plutarch. p.* 194.
	2	
	3	
	4	
LXXXVIII.	1	
	2	
	3	
	4	
LXXXVIIII.	1	Ariſtophanes Nubes docet. *Sam. Petit. in miſcell.*
	2	Sero auctumno Alcibiades pugnae ad Delium intereſt, iterum ſocio Socrate. *Plutarch. pag.*
	3	
	4	Alcibiades turbat res inter Lacedaemonios et Athenienſes. Ad Mantineam geſta.
LXXXX.	1	
	2	
	3	
	4	

Olympiad.	Anno	
LXXXXI.	1	Alcibiades contendit cum Nicia. In Siciliam mittitur. *Thucydides Libr. VI. Diodor. Sicul. Libr.* XIII. Mox abſens accuſatur, reuocatur, ad Lacedaemonios perfugit.
	2	
	3	
	4	
LXXXXII.	1	
	2	
	3	
	4	
LXXXXIII.	1	Athenas redit. mox recidit in offenſam ciuium ſuorum. *Diodor. Sicul. Libr. XIII. pag.* 368.
	2	
	3	
	4	
LXXXXIIII.	1	Fraude Pharnabazi interficitur. *Diodor.* Sicul. *Libr. XIV. pag.* 400.

DE

DE GANDISAPORA
PERSARVM QVONDAM ACADEMIA MEDICA OBSERVATIO HISTORICA.

Io. Henr. Schulzii.

Si linguae, quas Aſiam incolentes populi hodie vernaculas habent, totidem cultores in Europa nactae fuiſſent, quam vel Graecae vel Romanae obtigerunt; atque typographorum praela libros earum gentium toties renouaſſent ac multiplicaſſent, ac Latina et Graeca monumenta per tria admodum ſaecula incudi ſubiecta fuerunt: minime dubitandum videtur factum pridem fuiſſe, vt de multis hiſtoriarum monumentis, quae inter obſcura hodie reponuntur, multo certiora noſſemus, et aliqua, quae nos ſcire remur, aliter apud illos tradi cognoſceremus. Non equidem ignoro dari multa, in quibus longiſſime ab omni antiquitate recedunt ſcriptores illi, qui ſua ad Muhammedis Coranum debent accommodare, illiusque auctoritatem, quam ſacroſanctam putant, tueri enixa opera omnique ſtudio et ingenio coguntur; in quibus nemo noſtrum erudiri ſe ab illis cupiet. Sed ſi iſta demantur ſolaque haec ſpectentur, quae poſt Muhammedis tempora acciderunt, aut quae ab illo non deformata fuerunt; ſuperſunt ſane multa, in quibus illis, qui rebus domi ſuae geſtis aut interfuerunt aut propius adfuerunt, maiorem fidem, quam remotioribus quibuſcunque tribuendam eſſe cum recta ratione ſtatuere poſſumus. Et ſunt profecto non pauca, quae aut ignorare oportet, aut ex orientalibus ſcriptoribus requirere. Neque contemnendi iſta mo-

menti ſunt, ſed tam magni, quantum hiſtoriae, tam eccleſiaſticae, quam ciuili et litterariae omnes merito tribuimus.

Huius generis puto illam, quam ſuſcipio, diſputationem de vrbe Perſiae Gandiſapor, quae et Giondiſabour ſcribitur: poſſemuſque Saporopolin, vtpote a Sapore conditam, vocare, vt Conſtantinopolis a Conſtantino denominatur. Multum illa celebratur in ſcriptis eorum, qui res Perſarum eccleſiaſticas deſcribunt: nec raro eadem commendatur ab illis, qui de doctis viris, praeſertim medicis in orientalibus terris celebribus, aliquid conſignarunt. Habuit enim epiſcopum praecipuae auctoritatis inter Neſtorianae ſectae addictos, Metropolitani auctoritate fulgentem, primum dignitate a Catholico, quo ſe nomine venditabat ille, qui Seleuciae ſedem tenebat, et de primatu cum aliis certabat. Fuit porro in illa noſocomium et ſchola medica, ex qua abunde multi prodierunt, qui epiſcopale faſtigium conſcenderunt, aut in aulis primorum Chaliſarum comites archiatrorum fuerunt, et pro ea, qua in aulis principum valebant, gratia, plurimum poterant in rebus eccleſiaſticis ad ſuum nutum vel dirigendis vel turbandis. Neque exigua fuit illorum, qui in illa ſchola bonis litteris et medicinae operam dabant, auctoritas, quum in patriarchae electione partem haberent.

Quae ſingula effecerunt, vt de hac tam clara et nobili vrbe per complures annos, perque omne genus librorum requirerem, quae ad ſtatum eius intelligendum poſſent aliquid adſerre. Enimuero ſatis ſuperque didici, veriſſimum eſſe, quod EVSEB RENAVDOTVS *de liturg. Tom. II. pag.* 271. conqueſtus eſt, rem adeo fluxam et incer-

incertam nobis eſſe omnem de regionibus et vrbibus orientalium gentium diſputationem, vt poſtquam limites populorum et prouinciarum magno labore ex antiquis geographis conſtituti ſunt, vbi comparantur cum ſequioris aeui ſcriptoribus Graecis, Syris et Arabibus, coniecturae prope omnes, etiam veroſimiliores euaneſcant. Tanta enim per continua Perſarum et Romanorum bella, deinde per Arabum dominationem, perque bellicoſarum gentium inuaſiones, mutatio rerum facta eſt, vt complures olim celeberrimae vrbes exciſae ſint, nihilque certi de earum ſitu et origine affirmari poſſit.

Sed de his deſino conqueri et ad propoſitam mihi rem accedo. GREGORIVS ABVLPHARAGIVS, qui et BAR-HEBRAEVS audit, celebris per Orientem medicus et Maphrianus, id eſt Primas Orientis ſectae Iacobitarum, poſt medium SAEC. XIII. floruit, vir litteris Graecis, Syriacis et Arabicis excultus, multorum ad omne ſcientiarum genus pertinentium ſcriptorum auctor. Videri poteſt illorum notitia, quam longo ordine dedit vir de litteris orientalibus longe omnium maxime meritus IOSEPHVS SIMONIVS ASSEMANVS, *bibliothecae orientalis Clementino-Vaticanae Tom. II.* a pag. 245. ad 272.

Eminent autem inter illius monumenta duo opera ad hiſtoriam pertinentia, alterum arabico ſtilo exaratum, quod doctiſſimus EDVARDVS POCOCKIVS edidit ſub titulo *Hiſtoria compendioſa dynaſtiarum*, alterum *Chronicon Syriacum*, in tres partes diuiſum, quod laudatiſſimus ASSEMANVS opus luce dignum, et omnium, quae Bar-hebraeus edidit, doctiſſimum aeque ac vtiliſſimum iudicat,

dicat, in bibliotheca Vaticana aſſeruatur. Huius prior tantum pars eſt, quam auctor breui ante obitum ſuum tempore Arabice a ſe conuerſam reliquit et Pocockius in lucem protraxit. Enimuero longe pleniora eſſe omnia in Syriaco, ſiue facta Arabum et Mogulenſium ſpectes, ſiue res Chriſtianorum in Thracia, in Syria, in Meſopotamia et in Perſide, doctus Aſſemanus teſtatur et ſpeciminibus comprobat *c. l. pag.* 312.

In hoc dynaſtiarum compendio de Aureliano Augusto in huncce modum ſcribit: „Aurelianus Caeſar ſex „annos imperauit. Pacem iniit cum Sapore Perſarum re„ge, eique filiam ſuam nuptum dedit, cui exſtruxit Sa„pores in Perſide vrbem Byzantio ſimilem, quam Giondiſa„bur appellauit. Miſit autem Aurelianus, qui inſeruirent fi„liae ſuae, medicos Graecos quoſdam, atque illi medi„cinam Hippocraticam in Oriente docuerunt.

En illuſtre ac notatu digniſſimum hiſtoriae momentum, quod vtique mereri videtur ſeriam inquiſitionem. Tam autem multa ipſi inſunt, quae ſeorſum conſiderari debent, vt omnino paucis defungi hoc labore non liceat.

Primum autem remouenda videntur, quae ad teſtimonii huius ipſiusque teſtis auctoritatem eleuandam poſſunt excogitari, aut iam prolata fuerunt. Quod igitur vnicus teſtis, iſque aeui admodum recentis, id dixit, omnino morari adſenſum ita poteſt, vt nemo debeat magno vitio dubitationem etiam protractiorem vertere. Enimuero quod vnicus eſt, imputandum paupertati noſtrae videtur et alicui ſocordiae in requirendis publicandiſque codicibus orientalium ſcriptorum, qui plurimi et optimi non ſuo merito in tenebris latitant, protracti autem, lecti

lecti et intellecti multa nos edocere poſſent, et, ſi quid auguror, poſteros noſtros edocturi ſunt.

Si recens eſt ſcriptor Abulpharagius, conſtat eum vetuſtiſſimae memoriae auctores et domeſticos teſtes ad manus habuiſſe, quos nemo vel noſtrum vel Romanorum, qui Aureliani temporibus propiores fuerunt, inſpexit. Nactus eſt Aurelianus Aug. vitae factorumque ſuorum ſcriptorem FLAVIVM VOPISCVM, aeuo Conſtantini ſupparem, cuius ſilentium de tam nobili argumento fraudi eſſe Abulpharagio non debet. Quantumuis enim oſtentet ephemeridas, in quibus ipſe quotidiana ſua ſcribi praeceperat, ex bibliotheca Vlpia acceptas; vel mancae illae fuerunt, vel parum diligenter illis vſus eſt, qui de maximi ponderis vitae momentis tam ieiune et imperfecte conſcripſit. Quis enim legens apud VOPISCVM, quod Aurelianus legatus ad Perſas iuerit, doniſque honoratus fuerit, qualia imperatoribus tantum dari a rege Perſarum ſolita ſint, non optauerit adiectum, a quonam miſſus, cuiuſque rei cauſa, fuerit. Vix dubium eſſe poteſt, talia fuiſſe in iſtis libris conſignata, atque poſteritatis memoriae conſultum tantarum rerum annotatione melius fuiſſe, quam quod friuoli tantum augurii argumento ea adnotauit.

Sed omnem hanc Abulpharagii narrationem in fabulas reiecit vir doctiſſimus et de Auguſtorum hiſtoria, ſi quiſquam alius, praeclare meritus TILLEMONTIVS. Videamus quo argumento. Non ſolebant, inquit, Romani filias ſuas exteris elocare. Certe hoc non magis ſolebant antiqui, quam exteras ducere An propterea Antonius triumuir non duxit Cleopatram Aegyptiam?

Id quod ſollemne et publicis moribus receptum ac legibus etiam cautum eſt, tam non eſt perpetuum, vt non aliquibus potentibus libeat et liceat praeter ſolitum facere. Tota Pompeii vita eſt ſeries euentuum, qui aliter, quam Romae ſolebat agi, plaudente omni populo contigerunt. Et vt porro appareat, multa aliter fieri ex neceſſitate, vel propter vtilitatem, quam olim ſolebat fieri, nulla re opus eſt, quam conſiderare tempora Aurelianeis propiora. Quis propterea negauerit Valerianum Aug. in vinculis Perſarum multis annis manſiſſe, atque etiam deceſſiſſe, quod priſci Romani non fuerunt ſoliti permittere, vt ciues bello capti aut ſigna captiua in hoſtium poteſtate manerent: quod bella eorum cauſa ſuſceperunt, coegeruntque hoſtes redditis captiuis pacem redimere. Tanto autem magis vel ignauia vel imbecillitas Romanorum admirabilis videri debet, quia Valeriano fuit filius Auguſtus, a cuius pietate exſpectandum videbatur, vt in tam graui cauſa faceret, quod maiores ſui ob mercatores laeſos aut nauem onerariam captam et detentam fecerant.

Sed bene tamen habet, gratiaeque Vopiſco debentur, qui nobis legationem hanc commemorauit: vnde ad coniecturas non improbabiles ducimur, quo pretio Valerianus fuerit Perſis proditus. Videtur intellexiſſe Vopiſcus, quam parum Aureliano ſuo honorifica futura eſſet vera et plena illius legationis deſcriptio, ideoque friuolis recenſendis operam conſumendam exiſtimauit. De reliquo non video, quid Aurelianum, quum legatione illa fungeretur, adhuc priuatum deterrere potuerit, quo minus filiam Sapori permitteret, quum Romanas vxores Choſroes Abruizus et quidam Chazarorum rex, atque hic

adeo

adeo imperatoris filiam deinde habuerint. Ne dicam quam parum connubiorum priſcae leges obſeruatae fuerint, iam ſatis longo ante Aurelianum tempore. Certe in Septimii Seueri domo matrem familias Syram, et in omni deinceps familia eiusdem nationis mulieres deprehendimus. Sed haec miſſa facio, quae nec ipſe adieciſſem, niſi me antiquae conſuetudinis Romanae intempeſtiua obiectio ad leuitatem argumenti oſtendendam deduxiſſet.

Grauius eſt, quod ad hanc de origine Gandiſaporae narrationem labefactandam deducitur dubium ex chronico Abulpharagii Syriaco, ex quo ortus Gandiſaporae in hunc ſenſum apud ASSEMANVM *Tom. IV.* refertur: „Abducto „in Perſidem Valeriano, Gallienus Chriſtianis pacem red„didit. Sapores autem in Perſide aedificauit ciuitatem Con„ſtantinopoli ſimilem, quam Gandiſapor appellant, eum„que (Valerianum) ibi collocauit. Porro aduenerunt „cum eo complures periti medici Graeci, qui medici„nam Hippocraticam in Oriente diſſeminarunt.„ Enimuero conſtat Arabicam dynaſtiarum hiſtoriam ab ipſo auctore in compendium ex Syriaco eſſe redactam: adeoque cogitationes poſteriores ipſum praetuliſſe prioribus manifeſtum eſt. Iam ſi matrimonium cum Aureliani filia, quod ad nos parum pertinet, non confirmatur: manet tamen vrbis nouae origo et medicorum in illam aduentus etiam hoc teſtimonio inconcuſſus. Commode autem explicandum eſt, quod Gandiſaporam Conſtantinopoli ſimilem ſcripſit: ſcilicet talem, quae magnificentia et cultu non concederet illi, quam Conſtantinus poſtea exſtruxit et de ſuo nomine appellandam voluit.

Progredimur ad plura inueſtiganda, dabimuſque operam, vt annum illius legationis, ſi fieri poteſt, certam reddamus, aut coniectura veroſimili aſſequamur. Non eſt dubium quin Sapores hic intelligendus ſit ſecundus, Artaxaris filius, quem Orientales Ardſchir Babegan denotant. Nam non alius Sapores conuenit temporibus Aureliani adhuc priuati. Atque ad hunc pacis componendae cauſa legatus fuiſſe videtur eo tempore, quo, Valeriano imperante, Cyriades anno CCLVIII Perſis in Romanorum ditiones duxerat tanto ſucceſſu, vt, Meſopotamia omni vaſtata, Antiochiam quoque caperent et diriperent: quo facto, nemine repellente, ad ſuas regiones abierunt, vt opimam praedam domum referrent.

Hoc admiſſo tempore Gandiſaporae ortum iam clarius intelligimus, adhibito alterius ſcriptoris orientalis AMRI teſtimonio, quem ASSEMANVS citat *Tom. II. pag.* 398. Is enim diſerte teſtatur vrbem Gandiſapor conditam fuiſſe, poſtquam ingens praeda ex Romanorum terris, ac praeſertim ex Antiochia fuiſſet capta et allata. Enimuero hic auctor nouam crucem hiſtoriae figit, dum Saporem alium, qui temporibus longe poſterioribus vixit, conditorem vrbis oſtendit, ſcilicet Hormiſdatis filium, quem nos Saporem III. deſignamus, qui vitam et imperium, quod nondum natus acceperat, ab anno Chriſti CCCIX. ad CCCLXXX. prorogauit, adeoque a temporibus Diocletiani ad Theodoſium vſque rebus praefuit. Ad Amri mentem alius ſcriptor orientalis MARES, qui vitam Papae, epiſcopi Seleuciae, condidit, fertur commentatus. Sed ſaepius iam laudatus ASSEMANVS in non ſatis genuina monumenta incidiſſe hos ſcriptores, aut ſtudio

ſtudio Gandiſaporenſis epiſcopi praerogatiuam amplificandi aliquantum magis quam veritati ſtuduiſſe exiſtimat. Quicquid horum ſit, quoniam mihi non licet in controuerſiae ad nos non pertinentis amplam expoſitionem deſcendere, ſatis illud apparere tamen exiſtimo, quod duo auctores in eo conſentiant, Gandiſaporam ex ruinis Antiochiae creuiſſe et amplificatam ac exornatam fuiſſe. Eam autem vrbem temporibus Saporis III. captam et direptam fuiſſe, nemo ſcriptorum illius aeui annotatum reliquit.

Quare non poſſum, quin ad Saporem potius II. quam III. referam Gandiſaporae originem; interim in medio relicta quaeſtione, vtrum Aureliani natam honorandi cauſa ad illud opus ſuſcipiendum et perficiendum Sapores tum primum acceſſerit, an magis ſtrenue in eo perrexerit, vt tanto libentius ac iucundius inter Perſas degeret. Quod autem in Syriaco chronico legitur, Valeriano a Sapore capto domicilium Gandiſaporae datum fuiſſe: id non debet deſtruere priorem vrbis condendae vel exornandae cauſam. Scilicet beneficii loco is habere debebat, quod in vrbe Graecis hominibus frequentata degere ipſi conceſſum fuit. Ceterum ea, quae de duriſſima captiuitate et miſerabili morte Valeriani a noſtris ſcriptoribus relata ſunt, forte nimium fuerunt exaggerata: quoniam Orientalium nullus quicquam de eo commemorauit, quum id reticendi cauſam tunc ſaltem non habuerint, poſtquam Perſarum dynaſtia omnino deleta, ſumma rerum ad Chalifas Sarracenorum fuerat delata: ſatisque libere de ſaeuitia Perſarum in Chriſtianos tradiderint, nec rationem ſupprimendi habuerint viri Chriſtianis quondam tam infenſi miſerum exitum, ſaeua vita non indignum, ſi domi ſuae quicquam de eo audiuiſſent.

Atque adeo Gandiſaporae conditae aeram ſic ſatis probabiliter collocabimus inter annos CCLVII. et CCLX. Proximum eſt, vt quaeramus eius ſitum: quem ſatis conſtanti conſenſu tradiderunt orientales ſcriptores NASSIR ETTVSAEVS et VLVGBEIGVS in tabulis, quae in geographiae ſcriptorum minorum, Oxonii editorum, Tomo III. inſertae ſunt. Vterque enim Gandiſaporam tribuit prouinciae Choreſtanae, eique longitudinis gradum LXXXIV, et minuta quinque, latitudinis autem XXXI. minuta LV. adſignat. ABVLPHEDA, ab Aſſemano adductus, haec habet: Gandiſapor, Chuziſtanae vrbs, ab ea ad Toſtar ſunt octo paraſangae, et ad Suſam ſex paraſangae. Atque hos adductos auctores ſequutus eſt Arabicae aliarumque Orientis linguarum gnariſſimus Profeſſor Pariſienſis in tabula geographica, quam vitae Timuris a ſe in gallicum ſermonem conuerſae Tom III. inſerendam ad paginam 193. curauit.

Nimis itaque longe aberrauit IO. FREINDIVS in hiſtoria medicinae, qui Gandiſaporam et Niſaporam vnam eandemque vrbem exiſtimauit. Haec enim Choraſanae prouinciae eſt, et, vt BARTHOLOMAEVS HERBELOTVS ex ſcriptis idoneis addocet, ſitum longitudinalem habet ſub gradus XCII. minuto XXX. latitudinis autem in ſeptemtrionem extenſae gradum XXXVI. et minutum XXI. aequat. Sed videor mihi inueniſſe, quid viro eximio fraudi fuerit, eumque induxerit vt crederet Niſaporam et Gandiſaporam vnam et eandem eſſe vrbem. Scilicet cum apud Abulpharagium Latine conuerſum *pag.* 143. legiſſet medicum celebrem Georgium Bachtiſchuae filium Gandiſaporenſem; deindeque in eadem verſione *pag.*

pag. 153. Niſapora accerſitum illum in aulam Raſchidi inueniſſet: nomina haec vnam eandemque vrbem denotare forte credidit: praeſertim cum inter Choroſanam et Choreſtanam prouincias exigua ſit nominis diſcrepantia, quarum haec Gandiſaporam, illam Niſaporam continet. Enimuero manifeſtum eſt textum Arabicum vltimo hoc loco corruptum, ſanioremque lectionem eſſe, quam Pocockius margini textus Arabici adiecit ex alio ſcripto codice, qui pro Niſapora Gandiſaporam legit.

In hac igitur vrbe a prima ſua origine, hoc eſt ab ſaeculi chriſtiani tertii anno circiter ſexageſimo, ſchola medica floruit, a viris Graecam medicinam edoctis fundata. Quum vero in Perſia Chriſtianorum numerus augeretur, iſtique ſcholam etiam ſacram condidiſſent in vrbe eiuſdem prouinciae Lapetha ſeu Beth-Lapetha; tandemque, incertum quo tempore, ſedes Elamitarum metropolitana vna cum ſchola ex Lapetha Gandiſaporam transferretur: factum eſt vt ſchola ſacra cum medica in vnam coniungeretur, ſicque celebritatem magnam, frequentemque diſcentium numerum conſequeretur.

Nam quum Chriſtianorum antiſtites in varias ſententias ſcinderentur: neque illis diſſenſionibus tollendis et vniformi doctrinae reddendae concilia ſufficerent; iſti autem, qui pertinacius ſuis inhaerebant ſententiis, imperantium iuſſu migrare ex prouinciis Romano imperio ſubiectis cogerentur: magno numero illi concedebant in regiones Perſarum dominio ſubiectas, quae ab eo tempore cum illis, qui recte de religione et ad mentem conciliorum oecumenicorum ſentiebant, magno etiam numero Neſtorii aliorumque damnatorum dogmata ſequentium

tium implebantur. Atque tanto magis huc, tamquam ad portum, confluebant, qui ob ſingulares ſuas ſententias a ceteris exagitabantur, quum Perſis perſuaſum eſſet, tanto ſe fidelioribus vſuros eſſe Chriſtianis in ſuo regno degentibus, quanto longius diſſiderent ab iſtis, qui Romano imperio parebant, a quo tantum non perpetuis bellis diſtinebantur.

Poſtulat hic maxime locus, vt ante aliquid de Elymaide, Lapetha et Huzitide dicam, quam ad Gandiſaporam amplius deſcribendam progrediar.

De Elymaide, quantum ex ſcriptoribus Graecis et Romanis conſequi potuit, ample et accurate expoſuit vir non minus antiquae doctrinae vbere copia, quam ſua modeſtia celeberrimus CHRISTOPH. CELLARIVS, geographiae antiqu. Libr. III. Cap 19. ſect. 3. quem luminibus orientalium litterarum benigne ſupplet et illuſtrat vir incomparabilis ASSEMANVS Tom. IV. pag. CCCCXIX. et ſeqq. nobiſque oſtendit a quatuor diuerſis populis Elymaeis, Suſiis, Vſiis et Chuſaeis, in vnam gentem coalitis, prouinciam illam fuiſſe habitatam. Habuere illi Metropolitanum, qui primum locum poſt Seleucienſem Primatem obtinuit, atque in Syrorum monumentis triplici modo denotatur. Scilicet ab gentis vniuerſae nomine vocatur Metropolita Elamitidis: a ſede antiquiori in vrbe Lapetha, quae et Beth-Lapetha, Lapethenſis: denique Gandiſaporenſis recentiſſime vocatur ab eo tempore, quo ſedes Metropolitae, vna cum ſchola, ad vrbem Gandiſaporam translata fuit ex vrbe Lapetha. Haec Lapetha autem fuit primaria vrbs Huzitarum ſeu Vziorum, quos noſtri ſcriptores Vxios vel Oxios

Oxios vocare ſolent. Commemorauit illam ſuo nomine PROCOPIVS de bello Perſico, cum eo, quod ſit Vaſainae regionis, et a Cteſiphonte ſeptem dierum itinere ſit diſſita. Ex quo illud diſcimus, quod temporibus Iuſtiniani Magni integra ſuperfuerit, Perſisque paruerit.

Scholae, quam Lapethenſes habuerunt, ſacrae initia non facile determinare licet. Sunt autem veſtigia non obſcura, quae nos ad originem eius deducant. Scilicet ſaeculo V. quod modo Ioannem Chryſoſtomum, modo Neſtorium exagitabat, omnemque rem Chriſtianam in partes trahebat, Perſae ſuam ſcholam apud Edeſſenos habebant, cuius magiſtro Neſtorio ſe fauere non diſſimulabant. Hac re commotus Rabulas, epiſcopus Edeſſenus, Chryſoſtomo addictiſſimus, Perſas illa ſchola eiecit, ceteraque egit in Neſtorianae factioni addictos admodum ſeuere. Prima eiectio facta fuit, vt Aſſemanus oſtendit, circa A. C. CCCCXXXI. altera ſub imperatore Zenone A. C. CCCCLXXXIX. omninoque cum ſcholae Edeſſenae fine coniuncta fuit.

Hi itaque in exſilium pulſi patriam repetebant, ac epiſcopatibus praeficiebantur: quorum non pauci in Huzitide conſediſſe memorantur. Iſtorum ſtudio excitatae paſſim fuerunt ſcholae: quas inter Niſibena potiſſimum clara eſt facta. Sed quo tempore Elamitarum illa Lapethenſis coeperit, quoue cum Gandiſaporenſi coniuncta fuerit, non adeo clare cognoſcitur. Factum id iam fuiſſe poſt ſaeculi ſeptimi medium, ſatis certum eſt ex iis, quae ASSEMANVS Tom. II. pag. 422. et Tom. III. pag. 615. recenſet de Ioanne Marthae filio patriarcha Neſtorianorum triceſimo nono, qui, cum in ſchola Gan-

diſaporenſi litteras iuuenis didiciſſet, et monachus aliquamdiu fuiſſet, metropolita Gandiſaporenſis, tandemque patriarcha A. C. ɔcLXXX factus eſt. Atque ab hoc tempore clara eſt et crebra mentio in hiſtoriis Orientalium huius ſcholae, multaque commemorantur, quae auctoritate illam non exigua valuiſſe comprobant. Sed haec clarius patebunt ex illis, quae inferius adferenda erunt.

Relinquimus igitur ea, quae ad ſacram ſcholam ſiue Elamiticam ſiue Lapethenſem pertinent, aliis amplius inquirenda, nuncque conuertimus ſtudium ad medicam ſcholam Gandiſaporenſem, quae diu ante illam cum eccleſiaſtica coniunctionem per ſe viguerat; deinde autem, poſtquam coierunt, illuſtrius nomen magnamque auctoritatem conſequuta eſt. Vellem autem multa eſſe, quae referre de antiqua eius gloria poſſem. Sed in tanto vetuſtorum monumentorum defectu, quae paucula ſuppetunt, exhibebo.

Scribit itaque vir doctus, et ipſe medicus, quem initio laudaui, quod medici Graeci, Gandiſaporam miſſi, medicinam Hippocraticam in Oriente docuerint. Non eſt dubium, quin fuerint ante illorum ex Graecia aduentum Perſis ſui medici: Sed illis non fidentes iſti, qui ex Syria vicina, aliisque Romani imperii finibus, illuc habitatum conceſſerant, vna cum amore bonarum litterarum etiam deſiderium attulerant et conſeruabant, vt corporibus ſuis curandis haberent viros peritos et rationalem artem profeſſos. Omnes hiſtoriarum periti norunt, quam multi ab eo tempore, quo Alexander M. Orientem ſibi ſubiecit, et ad ſuos ſucceſſores tranſmiſit, Graeca gente

te oriundi illis regionibus conſederint; quibus poſtea ſub Romanis non pauci acceſſerunt: prorſus vt Syria et Meſopotamia omnis Graecorum eſſent plenae. Quumque Chriſtiana religio vndiquaque inualeſceret, eamque profeſſi antiſtites haberent, qui Graecorum inſtitutione vſi fuerant, certeque conſuetudine ipſorum carere non poterant, quum libri eccleſiaſtici omnes et Synodi antiquiſſimae illa lingua exaratae eſſent: ſatis vero videri ſimile debet, in tot hominibus aliquos fuiſſe, qui arti ad corporum valetudinem conſeruandam et reparandam tam neceſſariae pretium aliquod ſtatuerent.

Quum porro iſti, qui in prouinciis Perſarum dominio ſubiectis habitabant, quoties bella cum Romanis gerebantur, non ſine periculo ſatis certo vltra fines ſuos progredi poſſent; atque ſi per dominos id licuiſſet, ipſis Romanis ſuſpectos ſe fore noſſent: porroque religionis cauſa non parum ipſis moleſtiae apud Romanos crearetur: haec omnia videntur neceſſariam hanc illis curam feciſſe, vt domi ſuae alerent viros medicinae Graecanicae peritos, quorum ope poſſent vti, vel qui valetudinem afflictam ſentirent, vel qui diſcere vellent, quo pacto eſſet ſuccurrendum in periculo verſantibus. Efficiunt etiam haec dicta, vt fidem habeamus, medicinam ſemel in Perſiam delatam ſtudioſe fuiſſe fotam et conſeruatam: atque ſeorſum ſcholam Gandiſaporae fundatam ſemper habuiſſe patronos, qui conſeruandae eidem et exornandae operam darent.

Fuiſſe in illa vrbe noſocomium, quod praecipue inſeruiebat ad artem inſtituendorum commoditati, praeter Abulpharagium multis locis comprobat ex ineditis Syrorum et Arabum libris illuſtris doctrinae vir ASSEMA-

NVS. Quiſquis vetuſta monumenta diligentius verſauit, vix dubitare poteſt, eſſe xenodochia, ptochotrophea et noſocomia Chriſtianae religionis fructus laude omni digniſſimos. Mihi certe haud perfunctoria diligentia requirenti non obtigerunt huius generis inſtituta vel apud Graecos vel Romanos Chriſto nondum addictos: ſed ante Iuſtinianum non longo tempore haec coepiſſe, et ab ipſo egregia liberalitate aucta et amplificata fuiſſe, vel vnus PROCOPIVS pridem abunde me docuit. Ex quo fit, vt noſocomii Gandiſaporenſis antiquitatem ipſius vrbis initiis parem vix liceat credere. Idem fundatum a Perſis aut profanae religioni addictis ex eadem ratione non adducor vt credam. Quin potius perſuaſiſſimum habeo, illud fuiſſe conditum a Chriſtianis, qui in his locis conſederant, ſequutis exemplum aliorum in felicibus et commerciorum flore ornatis vrbibus degentium, quarum iam ſexto ſaeculo paucae videntur fuiſſe, quae ornamentis huius generis prorſus deſtituerentur.

Mentionem noſocomii facientes iam adducendos exiſtimo, vt eadem opera cognoſcantur plura, quae ad illius notitiam pertinent. Primum audiemus GREGORIVM ABVLPHARAGIVM, iam toties laudatum, qui *Hiſtor. dynaſt. pag.* 143. refert de Georgio Bachtiſchuae filio, quod ipſum Almanſor medicinae apud ſe faciendae cauſa Gandiſapora accerſiuerit. Hic itaque ad principem vocantem profectus noſocomii curam filio ſuo demandaſſe legitur. Factum hoc eſt circa annum Hegirae CXXXVII. Chriſti autem DCCLIV. Idem porro auctor anno Hegirae CCLV. Chriſti autem DCCC LXVIII. obiiſſe ſcribit Saburem Saheli filium, noſocomii Gandiſaporenſis praefectum, religione

gione Chriſtianum, qui libros compoſuit celebres, ex quibus eſt liber medicamentorum compoſitorum, quem in noſocomiis et pharmacopoeis ſequuntur, viginti duobus capitibus conſtantem.

Atque, vt durationem eius intelligas, exſtat apud ASSEMANVM ex concilio A. C. cIↃcccXVIII. habito canon, quo illis, qui medicinae operam dare cupiunt, praeſcriptum eſt, quibus antea imbuti exercitatique eſſe debeant, quam ad noſocomium admittantur. Notandumque eſt, quod illud concilium in hac conſtitutione ſequutum fuerit longe antiquiorem, quam patriarcha Sabarieſus circa A. C. Iↄccc XXXIIII. condiderat.

Medicae illius ſcholae caput idem fuiſſe videtur praefectus noſocomio, cui ceteri, qui in medicina docenda, facienda, diſcendaue occupabantur, ſubordinati et ſubiecti fuerunt. Metropolitae autem fuit ius ſupremum omnes res ſcholae vniuerſae adminiſtrandi et dirigendi: in quo ſaepe qui mali erant et auaritia contaminati, ita ſunt verſati, vt non parum res turbarentur, et controverſiae inſignes agitarentur. Id vbi incidebat, res ad Catholicum deferebatur, id eſt, ad ſupremum inter epiſcopos Neſtorianos patriarcham, cui metropolitani et ſingularum dioeceſeon antiſtites ſubiecti erant. Diſcere hoc licet ex longa narratione diſſenſionum, quae ſaeculi noni medio inter Marabam metropolitam Gandiſaporae et ſcholam fuerant ortae, atque apud Abrahamum Catholicum ita diſceptatae, vt Metropolitanus cauſa caderet; de quo videndus eſt ASSEMANVS *Tom. III. pag.* 508. 509.

Porro de hac ſchola medica illud mihi compertum eſt, quod iuuenibus non licuerit ſtatim ſe ad artem ſalu-

tarem conferre, ſed prius bene praeparandos ſe praebere debuerint. Pertinent haec propaedeumata partim ad pietatem et religionis praecepta, partim ad illas diſciplinas, quae ceteris omnibus vt inſtrumenta inſeruiunt. Et quamquam Niſibena Neſtorianorum ſchola omnes litteras ſaeculares excludebat, vt ASSEMANVS harum rerum vnus omnium peritiſſimus *Tom. IV. pag.* DCCCCXLII. oſtendit: idem tamen ſubiungit haec luculentiſſima: „Ce-„terum in aliis Neſtorianorum ſcholis praeter ſacrarum „litterarum ſtudium artes etiam liberales omnes doceri „conſueuiſſe, grammaticam ſcilicet, rhetoricam, poeti-„cam, dialecticam, arithmeticam, geometriam, muſi-„cam, aſtronomiam, medicinam, aliaſque, compertum „ eſt ex iis, quae Ebedieſus Sobenſis in catalogo ſcripto-„rum Syrorum refert: vbi tractatus de ſcientiis omnibus, „ac praeſertim philoſophici et medici, recenſentur.„ His tamen omnibus maiorem vel minorem fuiſſe operam impenſam, pro eo ac tempora Chriſtianorum floruerunt, aut magnis calamitatibus preſſa et afflicta fuerunt, facile intelligitur. Teſtantur de eo canones, quos ſaepius laudatus orientalium rerum promus condus ὁ πάνυ ASSEMANVS *Tom. IV. pag.* CMXL. produxit, quibus cautum eſt, vt omnes Chriſtianorum filii, antequam ad artem aliquam diſcendam admittantur, legant Dauidis pſalmos, nouum teſtamentum, et ex veteri illos maxime textus, qui in conuentibus ſacris ſolent praelegi. Atque haec conſtitutio fuit edita poſterioribus temporibus: quum felicioribus ſoliti fuiſſent totam ſcripturam ſacram in ſcholis pertractare, et tunc demum ad noſocomium dimitti, qui medicinae ſemet conſecraturi erant.

Quum

Quum ſic appareat fuiſſe omnem ſcholam ſub directione perſonarum eccleſiaſticarum: ipſaque noſocomia inde a primis Chriſtianorum temporibus eccleſiae fuerint ſubiecta et innexa: videtur ſane admodum probabile, quod ad ſcholam medicam acceſſus non patuerit, niſi Chriſtianorum liberis, atque non promiſcue omnibus, ſed qui eiusdem dogmatis eſſent aſſeclae. Facit haec conſideratio, vt non exiſtimem, Arabem illum medicum Hareth Ibn Calda, cuius mentionem facit Abulpharagius, diſcipulum in ſchola Gandiſaporenſi formatum et educatum fuiſſe. Scribit de ipſo his verbis: Profectus in Perſiam artem medicam didicit a Gandiſaporae incolis. Videntur mihi hic intelligendi medici in ſchola illa formati, qui ſuis auſpiciis artem in vrbe exercebant, quorum inſtitutione vſus fuit. Niſi probari poſſit, eum admodum iuuenem illuc delatum et religionem Chriſtianam ſequutum fuiſſe: quod tamen vix colligas, quia ſcriptor circumſpectus Arabem dicere et tribum eius indicare ſatis putauit: ſenem quoque Muhammedis tunc ſua commenta ſpargere incipientis gratia floruiſſe, ſuisque commendatum ab eo fuiſſe annotat.

Ex quo illud quoque colligimus, ſuperioribus addendum, floruiſſe ſcholam medicam Gandiſaporenſem ſaeculi ſexti poſtrema parte: et, ſi recte habent, quae probabiliter collegimus, iam tunc fuiſſe cum eccleſiaſtica vnitam. Ne autem aliquid hic determinate et pro omnino certo ponerem, effecit teſtimonium ab ASSEMANO *Tom. IV. pag.* CMXXIV. allatum, quod olim in ſchola ſiue Edeſſena ſiue Niſibena Chriſtiani pueri et pagani in vna eademque ſchola edocti fuerint: quod cur

non

non eadem ratione Gandiſaporae factum fuerit, nullam video rationem ſufficientem.

Addendum nunc eſt, vt ſcholae Gandiſaporenſis omnem ſtatum melius peruideamus, quod praeter theologiam et medicinam in ea etiam tradita alia fuerint. Frequenter memorantur eiusdem ſcholae ſcribae: quos puto eſſe illos, quos occupatos tenebat ſtudium legum, quo ſe aptos reipublicae negotiis ciuilibus reddere cupiebant. Certe inter Graecos et Orientales honorati homines erant οἱ γραμματεῖς: quod ex ſacris litteris comprobari poſſet, et ex numis ample illuſtrari, ſi id locus hic permitteret. Quare minime mihi viderer rem adſequutus, ſi vel notarios vel calligraphos hic vellem intelligendos propinare: quamquam et his honos illo tempore habebatur, quum ad multa vtilis eorum eſſet opera, illo praeſertim tempore et loco, vbi librorum erat magna raritas et par deſiderium. THEODORETVS *Hiſt. eccleſiaſt. Libr. IV. Cap.* 18. vbi de ſchola Edeſſena agit, inter conditores eius laudat admirandum Protogenem, in ſacris litteris eruditum et notarum peritum, qui puerorum magiſter factus, ſimul illos per notarum compendia ſcribere docuit et in diuinis eloquiis erudiuit.

Iam qui de Perſis ex Edeſſena ſchola eiectis ſcribunt, ſimul cum ipſis aiunt exceſſiſſe Edeſſenos ſcriptores, qui eiusdem perſuaſionis erant, ob quam Perſae expellebantur. Cumque hi partim apud Niſibenos conſederint, alii apud Elamitas, vt ſupra dictum eſt, ſcholasque condiderint: omnino iuſtum videtur, horum etiam tam celeriter per notas ſcribendi, quam deinceps plenis et elegantibus litteris codices exarandi magiſtrorum et ſtu-

ſtudioſorum rationem habere. Veroque ſimile videtur hos homines, ſi legum etiam gnari et canonum eccleſiaſticorum periti fuerunt in ſcholis redditi, multum in regenda et adminiſtranda republica neceſſarios et omnino commodos fuiſſe.

Quin poſſunt etiam, ſi ſcriptores ac ſcribas ſeiungere placet, interpretes librorum intelligi: ii ſcilicet, qui ex Graeca lingua in Aramaeam ſeu Syriacam, Chriſtianis omnibus per omnem Orientem vernaculam et in ſacris receptam, libros transferebant. Id vero ſtudium valde fuiſſe Syris commendatum, viriſque praeſtantiſſimis publica, vt colligere licet, auctoritate demandatum, norunt omnes in indagandis rebus hoc tempore per Orientem geſtis diligentius verſati. Certe Syri Arabibus in hoc longo temporis interuallo priores ſunt, eorumque ſtudium ita excitauerunt, vt non immerito videantur multae Graecorum librorum Arabicae interpretationes potius ex Syriacis quam Graecis codicibus factae.

Supereſt vt paucis diſpiciamus de ſcholae Gandiſaporenſis conditionibus omnibus. Eam ſub Metropolita fuiſſe, ſupra iam indicaui. Eundem exactionibus aliquando vexaſſe alumnos ſcholae, qui propterea in ius ipſum apud Catholicum vocauerunt, itidem iam attigi. Ceterum in eligendo Metropolita atque ipſo etiam Catholico Neſtorianorum, ſuffragia medicorum et ſcribarum illius ſcholae plurimum valuiſſe cum ex aliis teſtimoniis ab Aſſemano paſſim allatis conſtat, tum clariſſime ex illo, quod *Tom. III pag.* 160. ex Amro adductum legimus: adde *Tom. IV. pag.* CMXXXVI.

Ceterum multos, qui in ſchola Gandiſaporenſi fuerunt educati, et medicinam olim exercuerunt, ad epiſcopalem, quin metropolitanam dignitatem, fuiſſe inter Neſtorianos euectos, facile intelligitur ex indiciis clarorum inter huic ſectae addictos, virorum, qui muneribus eccleſiaſticis defuncti ſunt.

Apparet ex eo, quod Gandiſaporenſis ſchola medicinae potiſſimum intuitu, diuerſa ſequuta fuerit ab aliis in Oriente Neſtorianorum ſcholis, quae tantum fuere eccleſiaſticae. Huius generis erat illa Niſibena olim celeberrima, vt in ipſam Europam et Africam eius fama propagaretur. Inter huius leges fuit aliqua in hunc modum ſcripta: „Nemo fratrum, qui in ſchola docentur, „medicum ſequatur, aut lectionem ab eo excipiat. Non „enim conueniunt libri ad fidem ſpectantes cum litteris „ſaecularibus„ Ergo ne quidem permittebant Niſibeni ſuis alumnis ad medicum extra ſcholam diſcendi cauſa accedere: tantum aberat, vt ipſi in ſchola magiſtros artem docentes praeberent. Atque hoc ita iam fuit conſtitutum, antequam coniunctio eccleſiaſticae ſcholae Gandiſaporenſis cum antiquiori medica videtur fuiſſe facta.

Fuerintne plures, praeter Gandiſaporenſem, in quibus medicinam docere ac diſcere licuit, non habeo ſatis exploratum. Illud inuenio apud Graecos Conſtantinopolitanos, ſero tandem a patriarcha Luca, poſt ſaeculi XII. medium, fuiſſe cautum, ne quis medicinam exercens, et ne archiatri quidem dignitate exornatus, diaconus vel ſacerdos fieret, cauſa ſubiuncta: „Non eſſe ferendum, vt qui cum infulis et caſulis ſancta tractant, ſae„cularibus veſtibus induantur, et cum laicis, viris ſcilicet „medicis, incedant. Quam legem refert ENIMVND. BONEFIDIVS *iur. oriental. pag.* 147. 148.

OBSER-

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE

OBSERVATIO ECLIPSEOS LVNAE PARTIALIS

d. 21. Decembr. 1740.

d. 1. Ianuar. 1741.

IN OBSERVATORIO IMPERIALI PETROPOLITANO HABITA.

A.

Godofredo Heinſio.

Obſeruationis huius eclipſeos ſucceſſum exoptatum ſpondebat quidem maxima caeli ſerenitas; aſt frigus ingens, cuius intenſitas ex gradu 180, quem thermometrum mercuriale ex diuiſione Cl. de l' Isle indicabat, colligi poteſt, magnam occupationum partem fruſtraneam reddidit, cum ſaepe membrorum frigore rigentium curam habere neceſſitas vrgeret. Impedimenta haec iam preuiſa ſuadebant, appulſus vmbrae tantum ad praecipuas lunae maculas obſeruare. Quem in finem quoque duas circiter horas ante eclipſeos initium aliquot macularum loca in diſco lunae determinabam ope machinae paralacticae tubo 8. ped. inſtructae, qui reticulum ex quatuor filis ad angulos ſemirectos verſus ſe inuicem inclinatis continebat. Eodem apparatu deinceps vſus ſum in ipſa eclipſeos obſeruatione, in qua per tubum memoratum non ſolum appulſus vmbrae ad maculas attendi, verum etiam appulſus cornuum lunae eclipſatae ad filum horarium reticuli, quantum quidem licuit, annotaui, vt exinde quantitatem partis obſcuratae colligere poſſem. Obſeruationum praecipua momenta haec ſunt. Tab. XIV.

Ordo

Ordo Obſeru.	tempus verum ſty-lo Aſtronomico.	
1	$12^h. 11'. 30''.$	Penumbra ad Schiokardum debilis adhuc.
2	— 17. 30.	Penumbra manifeſta.
3	— 20. 0.	Initium iam factum videtur in regione Schickardi.
4	— 20. 50.	Initium certe factum. Vmbra cum penumbra tantum confundebatur, vt de termino vmbrae nihil certe concludere liceret, quamobrem de momento initii ſatis certus non ſum.
5	— 27. 25.	Mare Humorum tangi videtur.
6	— 28. 0.	Mare Humorum certe tangitur ab vmbra.
7	— 30. 55.	Grimaldus tangi videtur.
8	— 31. 30.	Grimaldus certe tangitur.
9	— 33. 0.	Vmbra per medium Grimaldi.
10	— 34. 0.	Grimaldus totus vmbra inuolutus.
11	— 35. 20.	Vmbra per medium Capuani tranſit.
12	— 38. 0.	Vmbra ad Tychonem.
13	— 39. 0.	Tycho totus tectus.
14	— 43. 24.	Waltherus tangi videtur
15	— 44. 5.	Waltherus certe tangitur ab vmbra. Vmbra nunc terminari incipit.
16	12. 48. 33.	Differentia aſcenſionum rectarum inter cornu phaſeos praecedens et limbum lunae ſequentem deprehenſa eſt 1'. 34½ in tempore. In hac obſeruatione centrum Copernici ſtringebat filum

			ſilum diurnum reticuli, a quo auſtrum verſus cornu phaſeos ſequens ad ſenſum diſtabat $1\frac{3}{4}$ diametri Copernici. Quantitas partis lunae obſcuratae inde deducta eſt 3. digit: $27\frac{6}{7}$ minut.
17	—	58. 5.	Differentia aſcenſionum rectarum inter cornu phaſeos praecedens et limbum lunae ſequentem inuenta eſt 1′. 50″. et 12^h. 59′. 40″. limbus auſtralior Copernici et cornu phaſeos ſequens in eodem diurno exiſtebant. Determinata inde eſt quantitas obſcuratae partis 4. digit. $29\frac{2}{8}$ minut.
			Vmbra nunc bene terminatur.
18.	13.	14. 50.	Copernicus tangitur ab vmbra; aſt vmbra admodum lente acceſſit ad Copernicum, ita vt tactus apparens per vnum alterumue minutum primum durare viſus ſit.
19	—	17. 10.	Quarta circiter pars diametri Copernici tecta.
20	—	23. 40.	Circiter $\frac{2}{5}$ diametri Copernici àb vmbra tectae aeſtimatae ſunt.
21	—	27. 10.	Vmbra per centrum Copernici tranſit; et hic eſt terminus, quousque vmbra intra Copernicum penetrauit. Iſta deinceps medium Copernici deſerere incepit.

13

	13^h.	$30'$.	Vmbra bene terminata apparet.
22	—	36. 30.	Vmbra et Langrenum et Promontorium acutum (utramque maculam in parte auſtraliori) tangit . et per $\frac{2}{7}$ diametri Copernici tranſit.
23	—	39. 30.	Vmbra per medium Langrenum, tertiam partem Promontorii acuti et quartam partem diametri Copernici tranſit.
24	—	41. 30.	Vmbra per medium promontorium acutum et quintam partem diametri Copernici.
25	—	42. 37.	Langrenus totus tectus eſt et vmbra tangit Copernicum.
26	14.	18. 35.	Promontorium acutum totum emerſum.
27	—	23. 38.	Differentia Aſcenſionum rectarum inter cornu phaſeos ſequens et limbum lunae ſequentem deprehenſa eſt $23''$ in tempore; et cornu praecedens a diurno , quem centrum Copernici ſtrinxit , diſtabat ſemidiametro Copernici Auſtrum verſus. Inde deducta eſt quantitas obſcuratae partis 4. digit. $53\frac{5}{9}$ minut.
28	—	27. 42.	Differentia Aſcenſionum rectarum inter cornu phaſeos ſequens et limbum lunae ſequentem inuenta eſt $27\frac{1}{2}''$ in tempore ; cornu praecedens vero a diurno , quem centrum Copernici

ſtringebat, diſtabat circiter $1\frac{1}{2}$ diam. Copernici. Quantitas partis obſcuratae inde determinata eſt 4. digit. $32\frac{1}{4}$ minut.

29	$14^h.\ 38'.\ 55''.$	Waltherus totus emerſit.
30	— 40. 15.	Tycho emergere incipit.
31	— 40. 35.	Vmbra per medium Tychonis.
32	— 40. 55.	Tycho totus emerſus.
33	15. 5. 30.	Finis eclipſeos, ſatis bene obſeruari potuit, ita vt intra $15''$. de momento eius dubitandi locus non ſit, vmbra ſat bene terminata.

In ſchemate adiecto phaſes praecipuae exhibentur iis numeris notatae, quibus eaedem phaſes in recenſione inſigniuntur.

Ex multis obſeruationibus tum in tranſitu lunae per Meridianum, tum ope Machinae parallacticae habitis, et probe inter ſe conſentientibus, inuenta eſt mora tranſitus diſci lunaris per horarium $2'.\ 19''\frac{1}{8}$ temporis primi mobilis, quae ad altitudinem lunae $53°$. ſuper horizonte referri debet. Si ex hac mora auferantur $5\frac{1}{2}''$, quae motui lunae proprio in Aſſenſione recta interea facto debentur, prout obſeruationes tranſitus lunae per meridianum diebus 1 et 2. Ianuarii habitae docuerunt, prodit mora iſta correcta $2'.\ 13\frac{5}{8}''$. Huic in diurno reſpondent $33'.\ 37\frac{1}{2}''$ et in partibus circuli maximi $30'.\ 57''$, poſita diurni lunae diſtantia ab aequatore $= 23°$. Inde determinatur diameter lunae horizontalis $30'.\ 29''$, quae a $30'.\ 28''$. quanta ope calculi ex Tabulis Ludo-

 vi-

vicianis inſtituti deprehenſa eſt, non niſi vnico ſecundo differt.

Cum ſemidiametri vmbrae terreſtris quantitas ex parte pendeat a parallaxi Lunae horizontali; haec vero cum diametro Lunae horizontali prorſus connexa ſit, reliquis, quae dictam quantitatem definiunt, aliunde ſat cognitis: iſte calculi cum obſeruatione conſenſus ſuaſit, ſemidiametrum vmbrae terreſtris ex calculo quoque tuto aſſumi poſſe, vt eius ope aliquae deductiones ex obſeruatione eclipſeos noſtrae inſtituantur. Antequam autem ipſas deductiones exponam, expedit, praecipua calculi momenta enumerare partim a clariſſimo Winsheimio partim a me ex Tabulis Ludouicianis computata, vt deinceps calculi cum deductionibus comparatio fieri queat. Momenta haec ſunt.

Tempus verum ☍ ☉ et ☽ Petropoli	13^h.	55'.	58''.
Semidiameter vmbrae terrae		40.	29.
Inclinatio orbitae Lunae ad circulum latitudinis	84°.	33'.	
Latitudo ☽ borealis creſcens in ☍		39'.	12''.
Motus horarius verus ☽ a ☉le.		29.	12.
Interuallum temporis inter ☍ et obſcurationem maximam		7'.	39''.
Tempus dimidiae durationis	1^h.	21.	44.
Initium	12.	26.	35.
Obſcuratio maxima	13.	48.	19.
Finis	15.	10.	3.
Quantitatis Eclipſeos	6.	digit.	34⅓.

Ad deductiones formandas in ſubſidium quoque vocaui Maculas Lunae, quarum loca in eius diſco ante eclipſin

pſin, vt ſupra monui, determinaueram. Maculae ſequentes obſeruatae ſunt.

Poſita diametro Lunae 2′. 19½″. in partibus temporis, in iisdem partibus definita eſt.

	Differentia declinationum limbi Lunae inferioris et centri.		Differentia aſcenſionum rectarum limbi Lunae ſequentis et centri.	
Grimaldi	0′.	54¼″	0′.	5″.
Tychonis	0.	21¼.	1.	1.
Waltheri	0.	33.	1.	4.
Copernici	1.	20½.	0.	40⅓.
Langreni	1.	5.	2.	7¼.

His adiutus mediis ex elementis calculi ſchema eclipſeos conſtruxi, eique maculas lunae ex obſeruatione cognitas inſcripſi, eum in finem, vt facta appulſuum vmbrae ad maculas ex ſchemate definitorum comparatione cum appulſibus vmbrae ad easdem maculas in eclipſi obſeruatis, innoteſcat, quanta ſit calculi a coelo diſcrepantia, et quae calculi elementa correctione aliqua opus habeant. Sumſi autem pro initio eclipſeos obſeruato momentum 12^h. 20′. 0″. et pro fine 15^h. 5′. 30″. ita vt duratio eclipſeos exiſteret 2^h. 45′. 30″. et durationem ex calculo definitam 2^h. 43′. 28″, duobus minutis primis excederet. Inde primo cognoui, quod retentis ex calculo ſemidiametris Lunae et vmbrae, poſitione orbitae lunaris et horario Lunae a ſole, ſpatium a centro Lunae durante eclipſi deſcriptum maius prodiret eo, quod calculus determinauerat, adeoque minima centrorum Lunae et vmbrae diſtantia exiſtere deberet minor ea, quam calculus ſuppeditauit; vnde nimis magnam a calculo aſſignatam fuiſſe Lunae latitudinem in ☍ ſuſpicatus

 ſum

ſum. Coniectationem confirmauit tranſitus vmbrae per centrum Copernici ex obſeruatione cognitus; cum e contrario ne tactum quidem vmbrae et limbi Copernici concederet ſchema conſtructum. His aliisque circumſtantiis adductus, minimam centrorum Lunae et vmbrae diſtantiam ita imminui, vt conditioni tranſitus vmbrae per centrum Copernici ſatisfieret. nulla quantitati ſemidiametri vmbrae, quam ex calculo acceperam, inducta mutatione, quippe cui refragabantur reliquae conditiones. Inde deprehendi, latitudinem Lunae in ☍ ſtatuendam eſſe 38′. 41″, vt conditiones obſeruationis noſtrae eclipſeos ſaluae reddantur, quae proinde 31″ minor eſt latitudine calculo determinata. Porro quantitas eclipſeos hinc deducta eſt 6. digit. 48′. excedens quantitatem ex calculo definitam $13\frac{1}{3}$′. Horarius quoque Lunae a Sole 7″. auctior prodiit horario ex calculo petito, ſcilicet 29′. 19″, ſiquidem huic mutationem aliquam inducere et initium eclipſeos. 12^h. 20′. factum ſtatuere liceat. Hoc autem momentum a vero inito non nimium diſcrepare, appulſus vmbrae ad potiores maculas poſt initium obſeruati et phaſes notatae ſuadent, quippe quorum interualla a dicto initii momento ſat probe conueniebant cum interuallis, quae ſchema conſtructum et ex praecedentibus conditionibus correctum exhibebat. Et eodem pacto ſufficientem ſchematis cum obſeruationibus conſenſum obtinui circa pleraſque maculas, exceptis Langreno et Walthero, circa quas deſcrepantia aliqua prae ceteris exſurgebat. Tandem ob imminutam in ☍ Lunae latitudinem decreuit quoque interuallum temporis inter ☍ et maximam obſcurationem idque. 7′. 33″ prodiit; vnde ſi tempus obſcurationis maximae

ximae $13^h. 42'. 45$ initio $12^h. 20'. 0''$ et fine $15^h. 5'. 30''$ definitum hoc interuallo augeatur, habebitur tempus ☍ $13^h. 50'. 18''$, quod $5'. 40''$ deficit a momento ☍ per calculum determinato. Vt diſcrepantia calculi ab obſeruatione vno obtutu cognoſci poſſit, ſequentem tabulam ſubiungere iuuat.

Manentibus ſemidiametris Lunae et vmbrae, et poſitione orbitae lunaris reſpectu circuli latitudinis, vt in calculo, erit.

	ex calculo	ex obſeruatione	differ.
Latitudo ☽ bor. in ☍	$39'. 12''$	$38'. 41''$.	$31''$ −
Horarius ☽ a ☉	29. 12.	29. 19.	7 +
Tempus inter ☍ et Obſcurationem maximam.	7. 39.	7. 33.	6 −
Initium	12^h. 26. 35.	12^h. 20. 0.	$6'$. 35 −
tempus obſc. max.	13. 48. 19.	13. 42. 0.	5. 34 −
Tempus ☍	13. 55. 58	13. 50. 18.	5. 40 −
Finis	15. 10. 3.	15. 5. 30.	4. 33 −
duratio eclipſeos	2. 43. 28.	2. 45. 30.	2. 2 +
Quantitas eclipſeos	6. digit. $34\frac{2}{3}'$.	6. dig. $48'$.	$13\frac{1}{3}'$ +

Denique vt obſeruatio noſtra cum aliis obſeruationibus iuxta dimenſionem digitorum eclipticorum inſtitutis commode comparari poſſit, ope ſchematis conſtructi et correcti momenta definiui quibus ſinguli digiti obſcurari debuerunt. En momenta.

		Tempore vero:
Initium		$12^h. 20'. 0''$.
Digit.	1.	— 27. 26.
	2.	— 35. 13.
	3.	— 43. 27.

	4.	—	52.	43.
	5.	13.	3.	12.
	6.	—	16.	35.
	6. 48′ obſc. max.		42.	45.
	6.	14.	8.	55.
	5.	—	22.	18.
	4.	—	32.	47.
	3.	—	42.	3.
	2.	—	50.	17.
	1.	—	58.	4.
Finis		15.	5.	30.

ECLI-

ECLIPSES SATELLITVM IOVIS A MENSE MARTIO VSQVE AD FINEM An. 1740. PETROPOLI VISAE.

A.

G. Heinſio.

An. 1740.
Styl. nou. tempus verum.

Martii. 4. 8^h. $2'$. $50''$ Satelles primus iam emerſus debili tamen lumine inſtructus. Coelum erat paulisper vaporoſum. Penſitatis obſeruationis circumſtantiis aeſtimaui, emerſionem primam Satellitis circiter factam fuiſſe 8^h. $2'$. $15''$. Obſeruatio ope Tubi Catadioptrici 7. ped. peracta eſt.

Marti27. 8. 24. 22. Emerſio Satellitis primi tubo aſtronomico 23. ped. obſeruata, exacte.

Octobr, 27. 10. 17. 15. Immerſio Satellitis primi tubo Catadioptrico 7. ped. viſa. obſeruatio pauliſper dubia eſt, coelo exiſtente non nihil vaporaſo.

Dec. 12. 10^h. $27'$. $10''$. Immerſio Satellitis primi tubo Catadioptrico 7. ped. obſeruata; quae intra $10''$ temporis certa eſt. Ventus enim tubum agitabat.

TRAN-

TRANSITVS LVNAE AD IOVEM d. $\frac{2}{13}$ SEPTEMBR. 1740. STYLO ASTRONOMICO PETROPOLI OBSERVATVS.

A.

G. Heinſio.

Horis matutinis d. $\frac{3}{14}$ Septembr. tempore ciuili interdiu contingebat tranſitus Lunae propinquus ad Iouem cuius obſeruationem ſequentem, quantum quidem clementia coeli permiſit, iſtitui. Coelo ab initio valde ſereno, ope ſextantis muralis tranſitum Lunae et Iouis per meridianum obſeruaui et exinde differentiam aſcenſionum rectarum limbi Lunae ſequentis et centri Iouis inueni 2'. $19\frac{3}{4}$'' temporis primi mobilis, quae ad momentum 19^h. 2'. 10''. temporis veri d. $\frac{2}{13}$ Septembr. referri debet. Iupiter orientalior erat Luna. Eadem obſeruatione ad idem temporis momentum deprehendi differentiam declinationum centrorum Lunae et Iouis 39'. 18'' partium circuli maximi, quibus Iupiter borealior erat centro Lunae. Innotuit haec ex obſeruatis altitudinibus meridianis centri Iouis et vtriuſque limbi Lunae, ſuperioris et inferioris; vnde etiam diameter Lunae verticalis conſtitit 29'. 50'', ad altitudinem 52°. 20' referenda. Luna quidem phaſi erat affecta, cum vix biduo quadraturam ſecundam praetergreſſa eſſet; aſt quoniam linea cuſpidum fere normalis exiſtebat ad diurnum, altitudinem meridianam vtriuſque cornu vel limbi Lunae ſat probe obſeruare licuit. His in meridiano peractis, reliquam huius tranſitus Lunae ad Iouem obſeruationem ope machinae paral-

lacticae

lacticae expediendam ſuſcepi. Machina haec, vt iam ſaepe notaui, inſtructa eſt tubo aſtronomico 8. ped. qui reticulum ex quatuor filis ad angulos ſemirectos verſus ſe inuicem inclinatis continet, quod ad maculas lunares ſtatim examinaui, vt de conſtitutione eius iusta certior fierem. Examine vix finito totum coelum ſubito nubibus tegebatur, nec niſi poſt quatuor fere horas Luna iterum per nubium hiatus in conſpectum venit. Conceſſo Lunae adſpectu ſtatim obſeruationem ſitus Iouis reſpectu Lunae ſuſcepi, ſed non niſi differentia aſcenſionum rectarum limbi Lunae ſequentis et centri Iouis determinari potuit. Tanta ſcilicet erat diſtantia Iouis a Limbo Lunae boreali ſeptentrionem verſus, vt ſi limbum Lunae Ioui proximum ſuper diurnum reticuli ſtatuiſſem, Iupiter in tubo appariturus non fuiſſet. Hanc ob cauſam machinam ſic direxi, vt appulſus Iouis ad tria fila reticuli et limbi Lunae ſequentis ad filum horarium concederentur; quo facto ex habito ſimul reſpectu appulſuum cornu phaſeos Lunae Ioui priximi ad fila reticuli, vt de huius a Ioue diſtantia circiter, de poſitione vero diurni Iouis reſpectu filorum reticuli certo iudicium fieri poſſet, ſequentes inueni.

Tempore vero	Differentias Aſcenſionum rectarum limbi Lunae ſequentis et cenrri Iouis,
$22^h. 46'. 25''$.	$4'. 7''$. temporis primi mobilis
22. 52. 24.	4. $18\frac{1}{4}$.
22. 58. 25.	4. 29.

Iupiter occidentalior erat Luna. Differentia vltima 4′. 29″. intra vnum alterumue ſecundum dubia eſt, cum appulſum Lunae ad ſilum horarium propter nubes ſuperuenientes non niſi aeſtimare liceret. Coelum deinceps denuo nubibus tectum vlteriorem obſeruationem impediuit.

FINIS

INDEX COMMENTARIORVM

In Claſſe Mathematica.

Excerpta ex literis a *Daniele Bernoulli* ad *Leonh. Eulerum* datis p. 3.

Leonhardi Euleri De extractione radicum ex quantitatibus irrationalibus. p. 16.

I. Bernoulli Problema analiticum. p. 61.

L. Euleri Obſeruationes analiticae variae de combinationibus. p. 64.

D. Bernoulli De motu mixto, quo corpora ſphaeroidica ſuper plano inclinato deſcendunt. p. 94.

G. W. Krafftii Additamentum diſſertationis praecedentis de corporum plano impoſitorum deſcenſu. p. 100.

D. Bernoulli De vibrationibus et ſono laminarum elaſticarum commentationes Phyſico Geometricae. p. 105.

G. *W. Krafftii* Peripheria circuli mechanice dupliciter rectificata. p, 121.

L. Euleri De motu oſcillatorio corporum flexibilium. p. 124.

D. *Bernoulli* De ſonis multifariis, quos laminae elaſticae diuerſimode edunt, diſquiſitiones Mechanico-Geometricae, experimentis acuſticis illuſtratae et confirmatae. p. 167.

L,

L. Euleri De deſcenſu corporum ſuper plano inclinato aſpero. p. 197.

Eiusdem De motu corporum ſuper plano horizontali aſpero. p. 220.

G. W. Krafftii De methodis horologia ſolaria prompte delineandi. p. 255.

G. Heinſii De orbitarum apparentiis. p. 266.

G. W. Richmann, De perficiendis mappis Geographicis, inprimis vniuerſalibus per idoneas ſcalas metiendis diſtantiis inſeruientes. p. 300.

C. N. de Winsheim De interpolatione ſimplici meditationes. p. 312.

In Claſſe Phyſica.

G. W. Krafftii Obſeruationes Meteorologicae Anni 1740. p. 339.

I. Weitbrechtii Tentamen explicandi dilatationem et contractionem pupillae. p. 349.

I. G du Vernoy De glandulis renalibus Euſtachii. p. 361.

G. W. Krafftii Obſeruationes Meteorologicae Anni 1741. p. 374

C. E. Gellert De denſitate mixtorum ex metallis et ſemimetallis factorum. p. 382.

G. Ammani De Lapatho orientali, frutice humili flore pulchro inſt. Q. H. cor. p. 400.

In Claſſe Hiſtorica.

I. H. Schulzii De Alcibiade certaminis curulis Olympici apud Eleos victore obſeruatio Hiſtorico Critica. p. 407.

Eiusdem

Eiusdem De Gandiſapora, Perſarum quondam Academia Medica, obſeruatio Hiſtorica. p. 437.

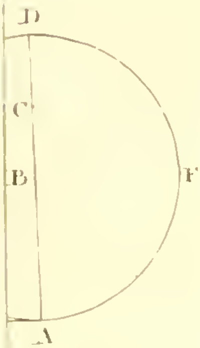
Obſeruationes Aſtronomicae.

G. Heinſii Obſeruatio Eclipſeos Lunae partialis d. $\frac{21 \text{ Dec. } 1740.}{1. \text{ Ian. } 1741.}$ in obſeruatorio Imp. Petrop. habita. p. 461.

Eiusdem Eclipſes Satellitum Iouis a Menſe Martio vſque ad finem An. 1740. Petropoli viſae. p. 471.

Eiusdem Tranſitus Lunae ad Iouem d. $\frac{2}{13}$. Sept. 1740. ſtylo Aſtronomico Petropoli obſervatus. p. 472.

1.



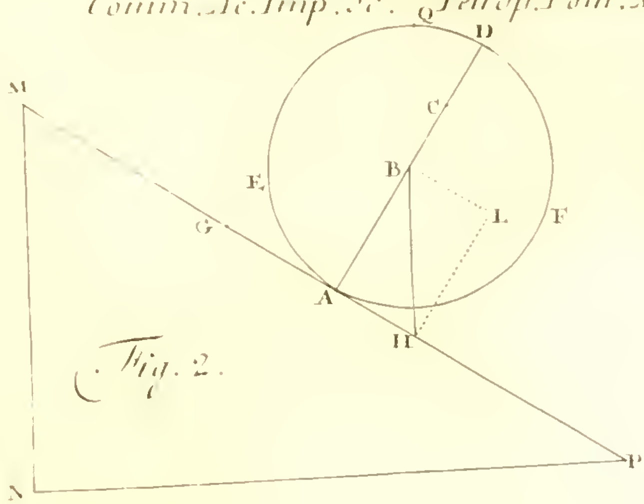
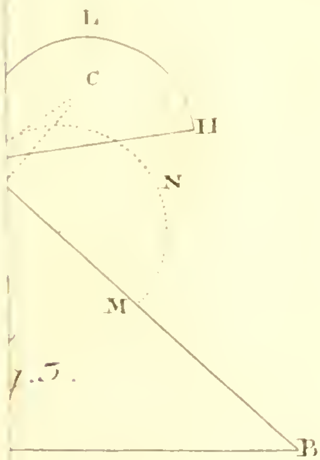


Fig. 2.



g. 3.

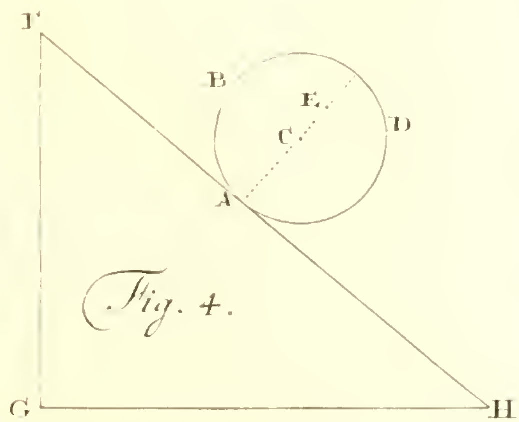


Fig. 4.

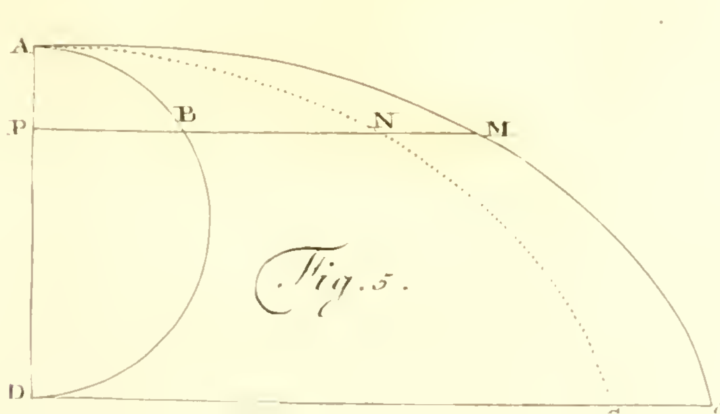
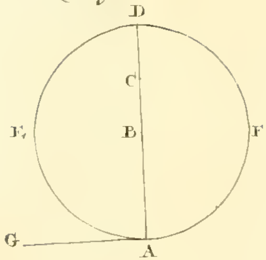


Fig. 5.

Fig. 1.



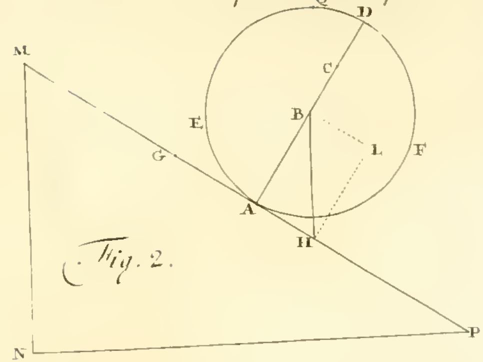


Fig. 2.

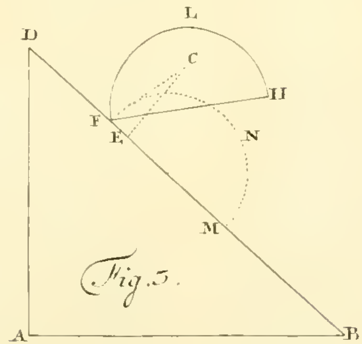


Fig. 3.

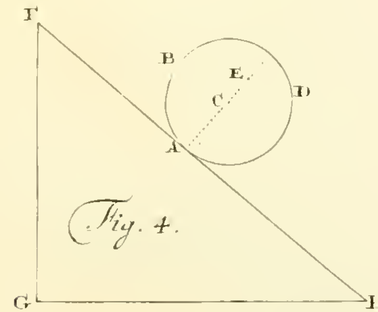


Fig. 4.

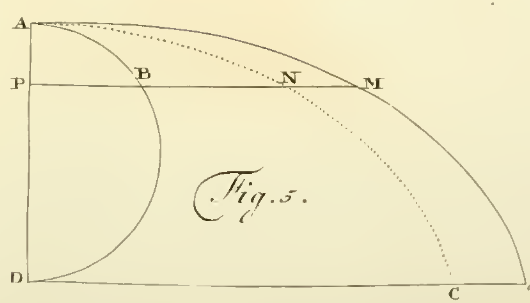


Fig. 5.

Fig. 1.

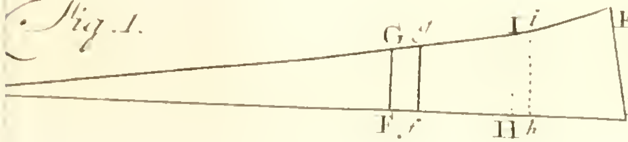


Fig. 2.

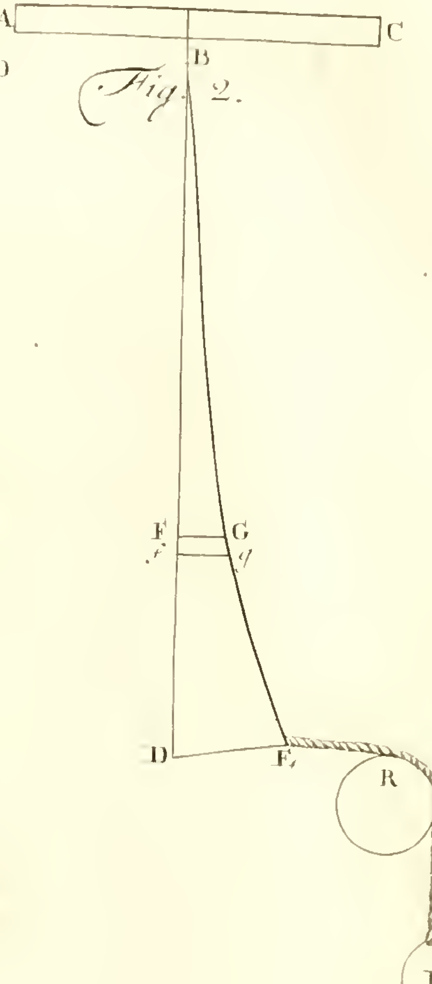


Fig. 3.

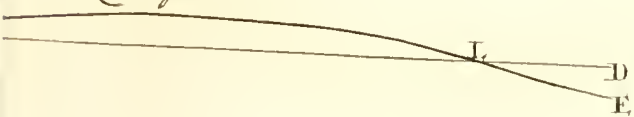


Fig. 4.



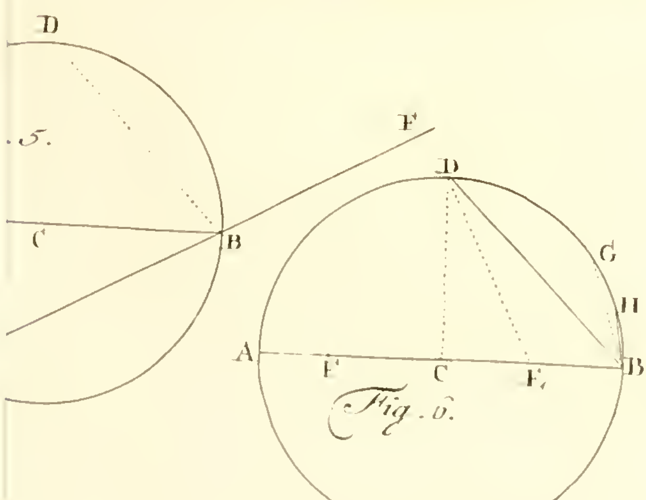


Fig. 5.

Fig. 6.

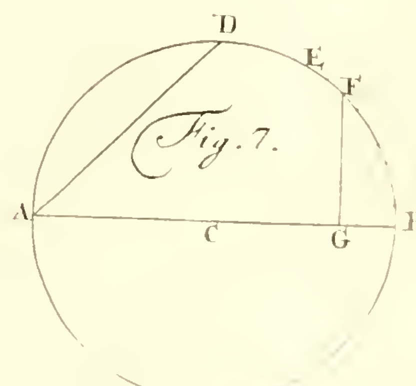
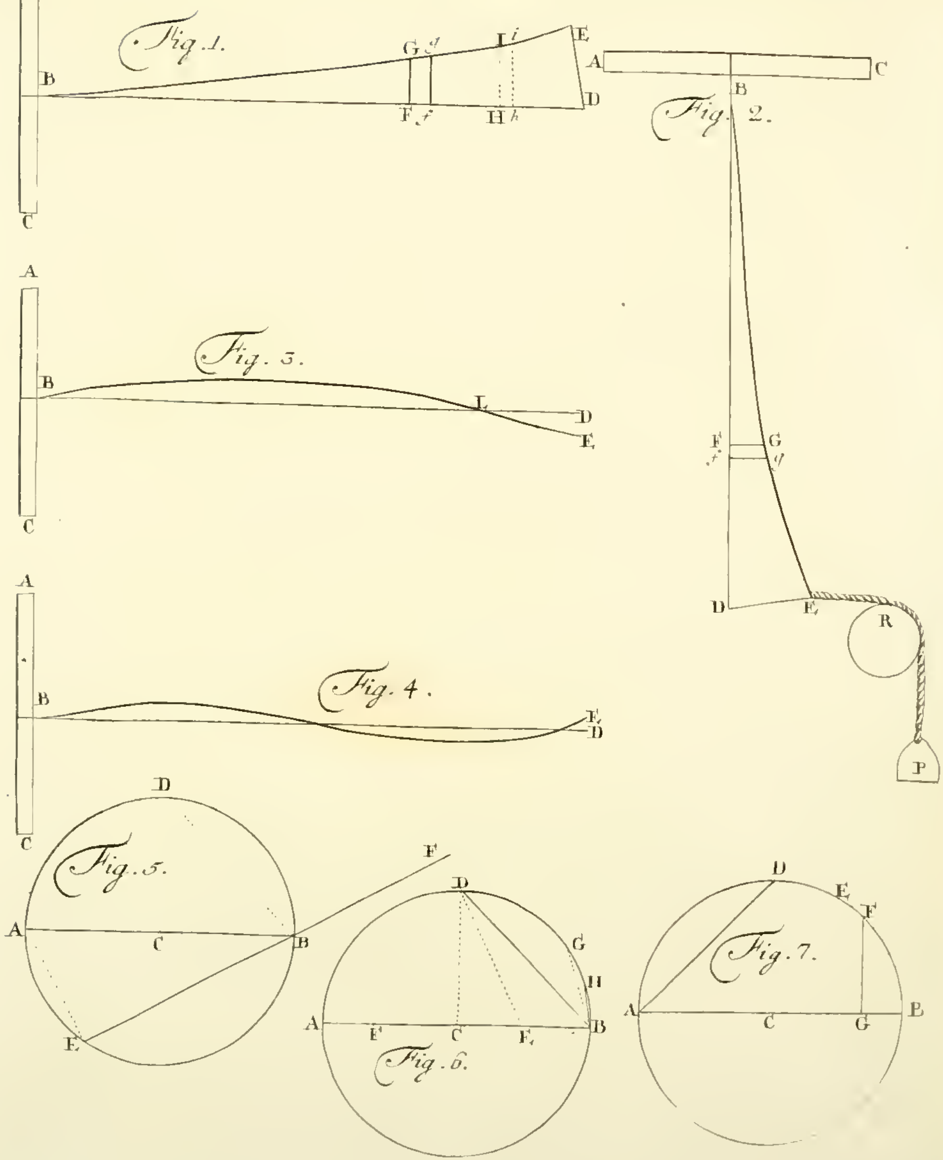
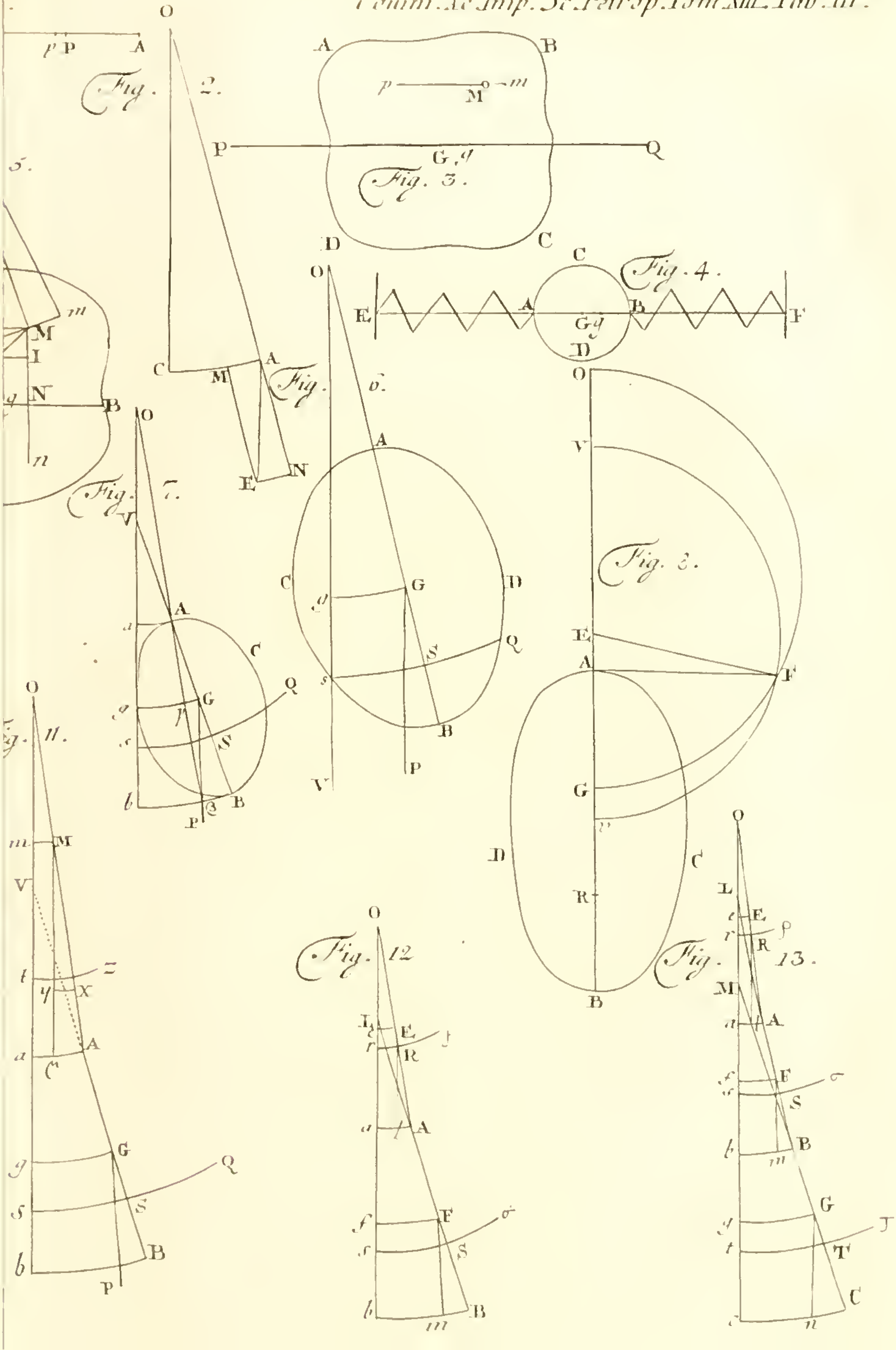
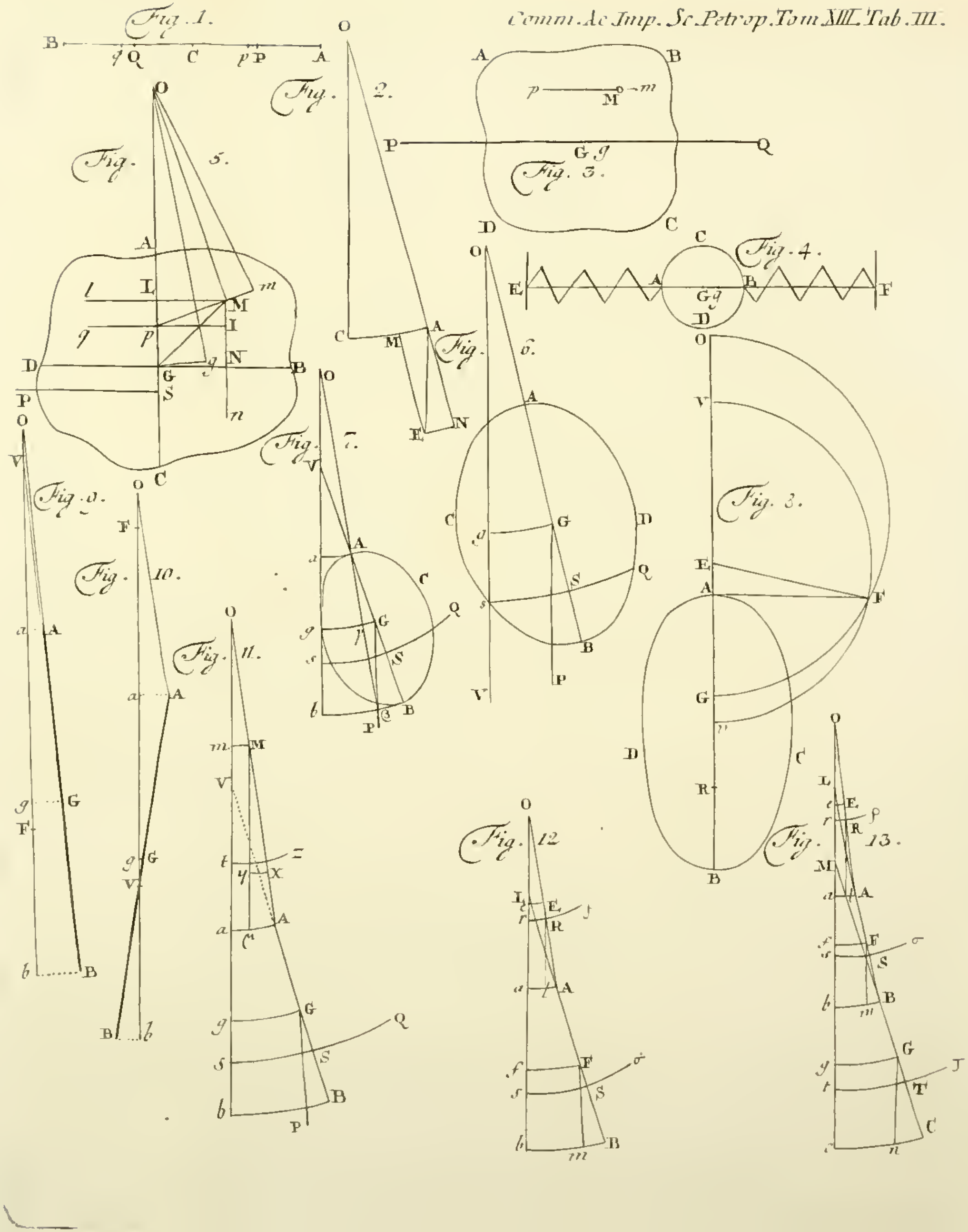
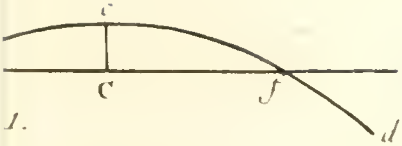


Fig. 7.


Fig. 1.
A
B
C
G g
I i
E
F f
H h
D
Fig. 2.
A
B
C
F G
f g
D
E
R
P
Fig. 3.
A
B
C
L
D
E
Fig. 4.
A
B
C
E
D
Fig. 5.
D
A
C
B
E
F
Fig. 6.
D
G
H
A
F
C
E
B
Fig. 7.
D
E
F
A
C
G
B


Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 11.
Fig. 12
Fig. 13.

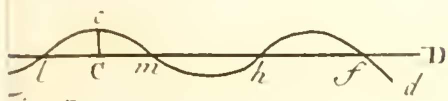

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12
Fig. 13.



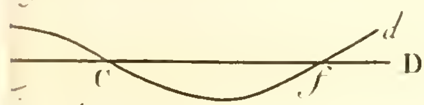
1.



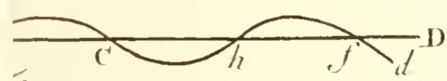
Fig. 2.



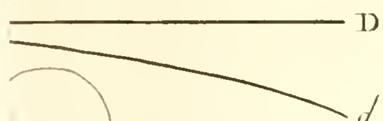
ig. 3.



ig. 4.



ig 5



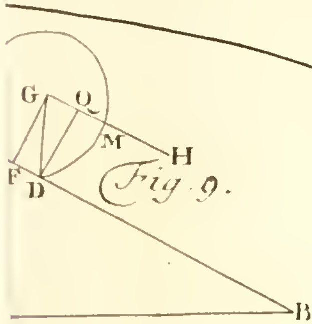


Fig. 9.

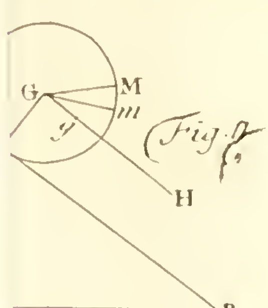


Fig.

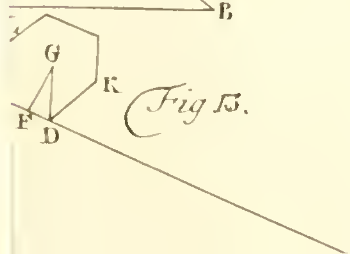


Fig 13.

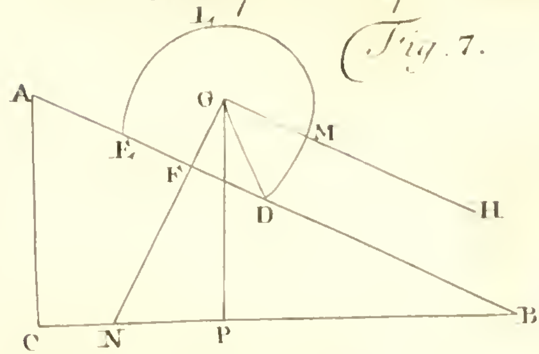


Fig. 7.

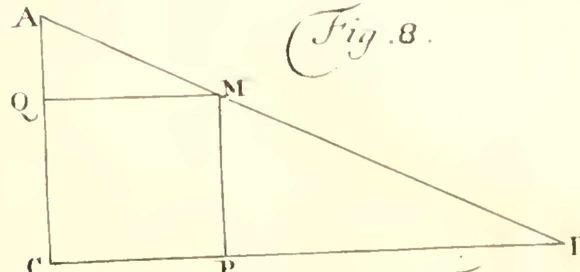


Fig. 8.

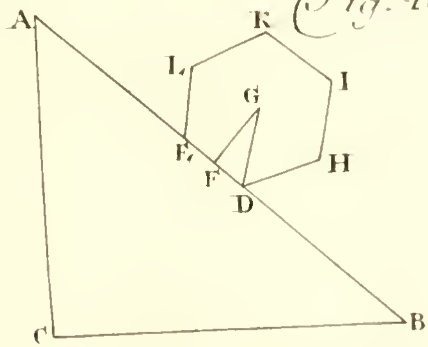


Fig. 10.

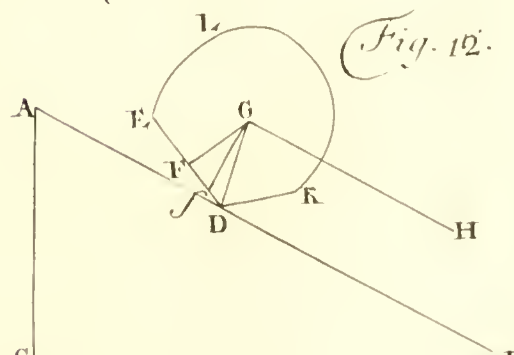


Fig. 12.

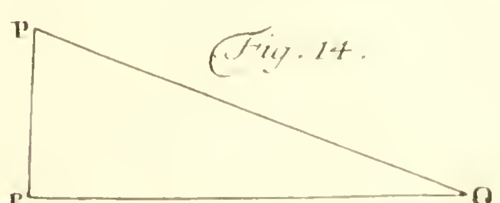


Fig. 14.

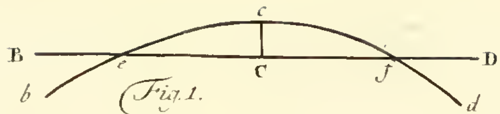


Fig. 1.

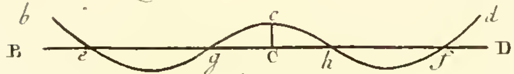


Fig. 2

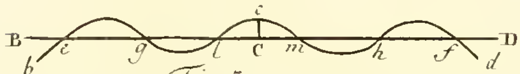


Fig. 3.

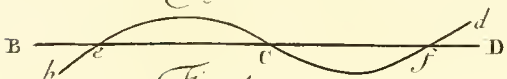


Fig. 4.

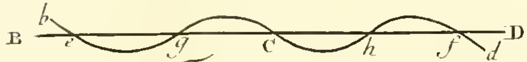


Fig 5

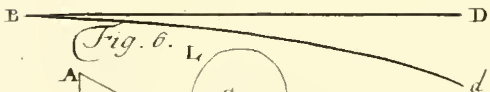


Fig. 6.

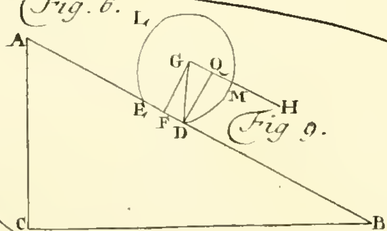


Fig 9.

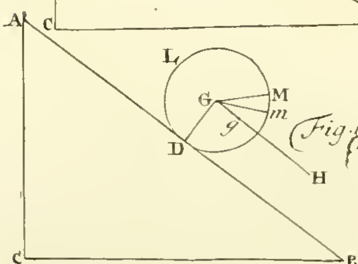


Fig. 11.

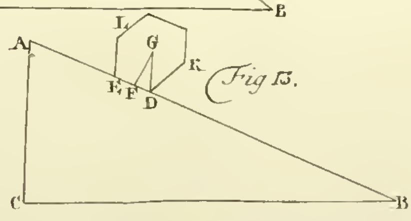


Fig 13.

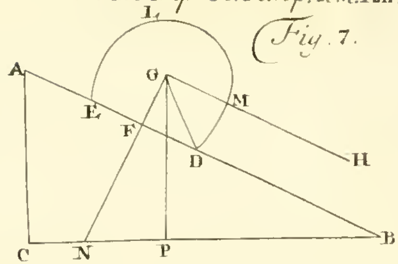


Fig. 7.

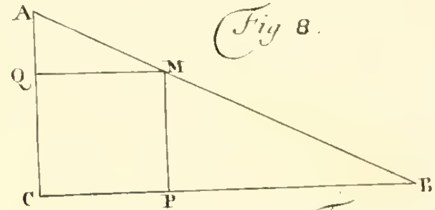


Fig 8.

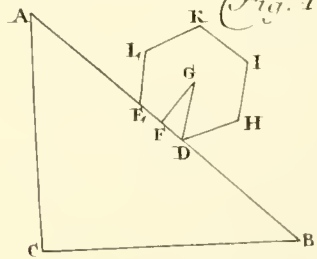


Fig. 10.

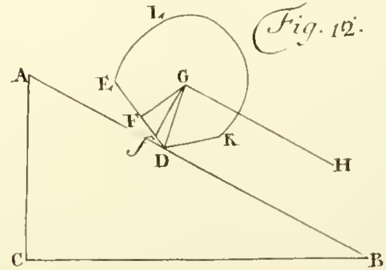


Fig. 12.

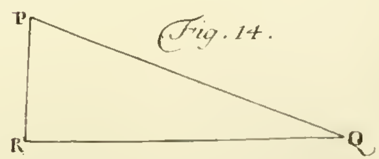
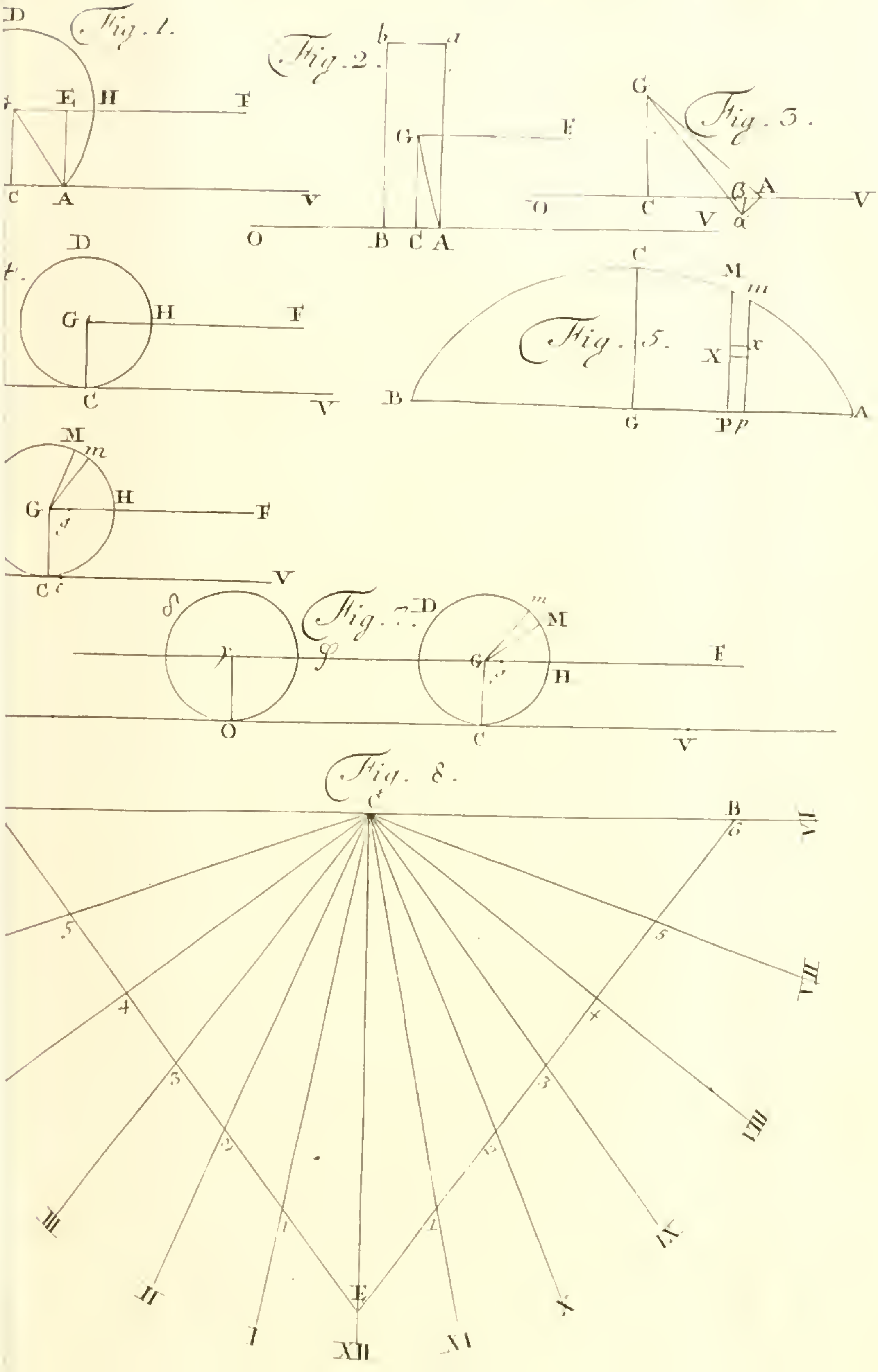
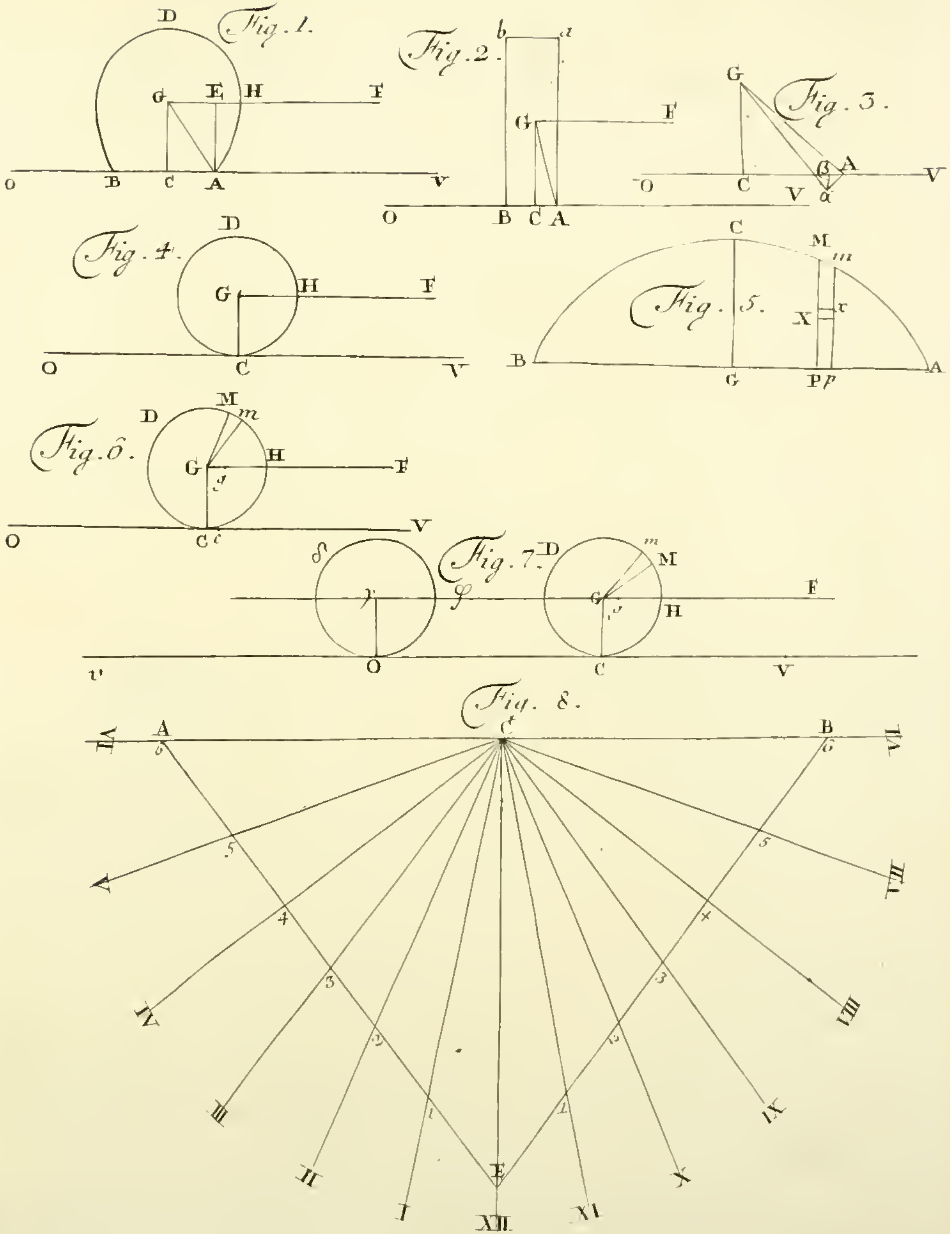


Fig. 14.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 7.
Fig. 8.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.

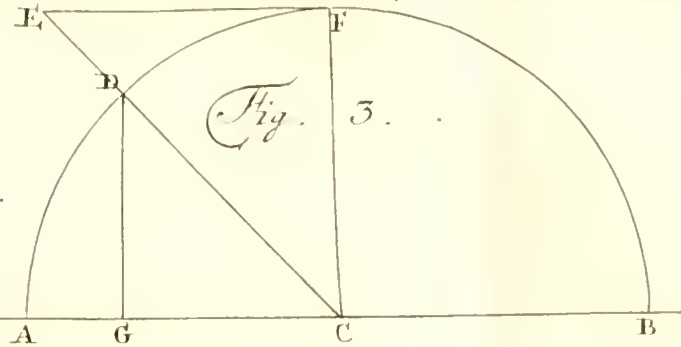


Fig. 3.

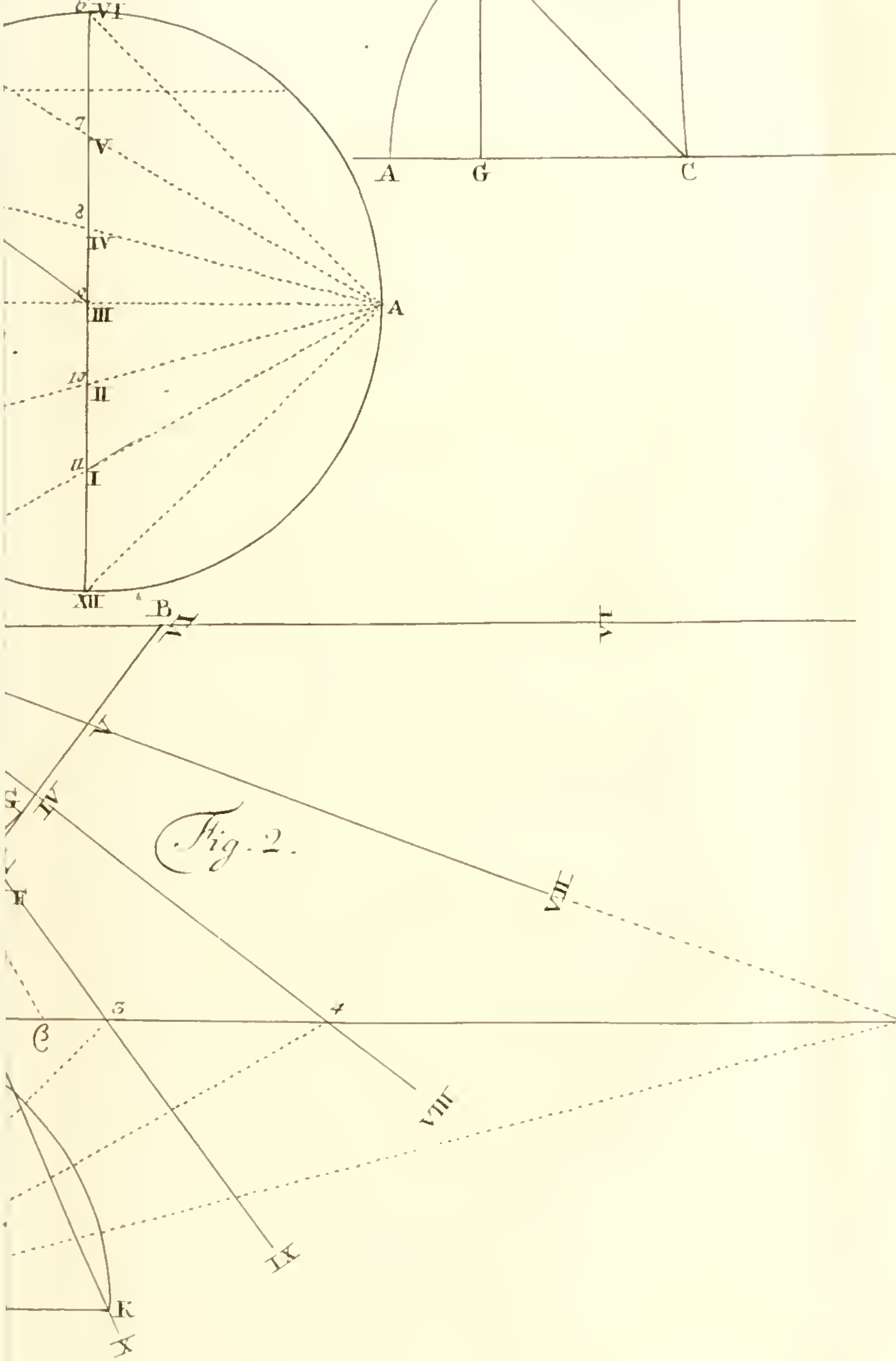


Fig. 2.

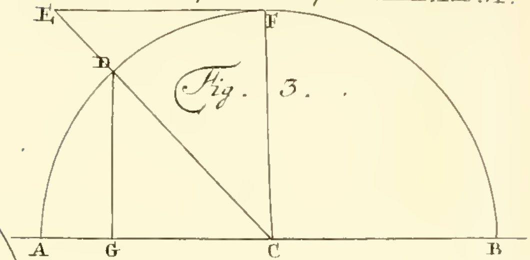


Fig. 3.

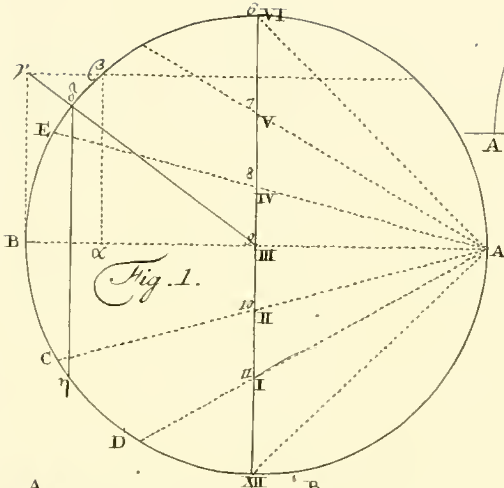


Fig. 1.

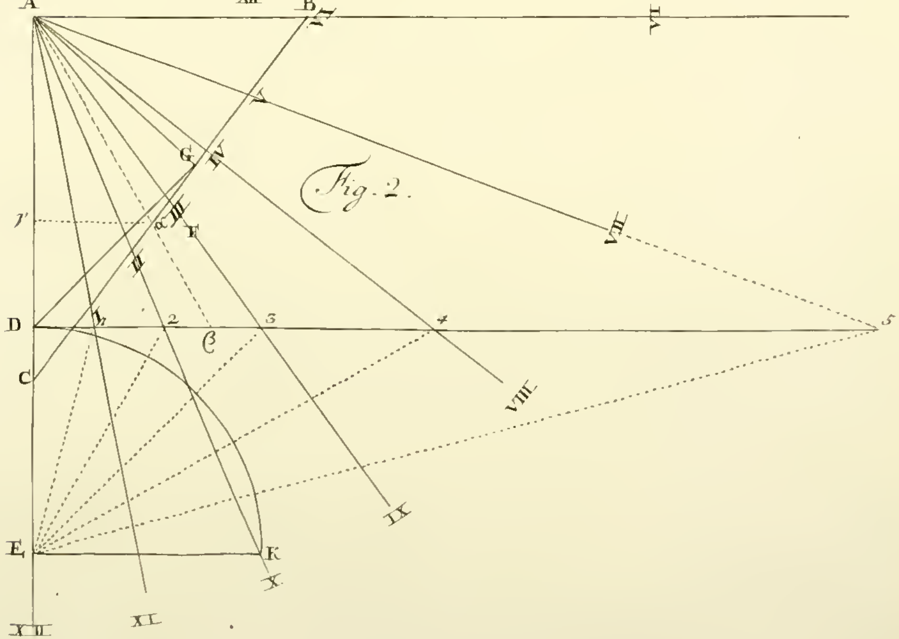
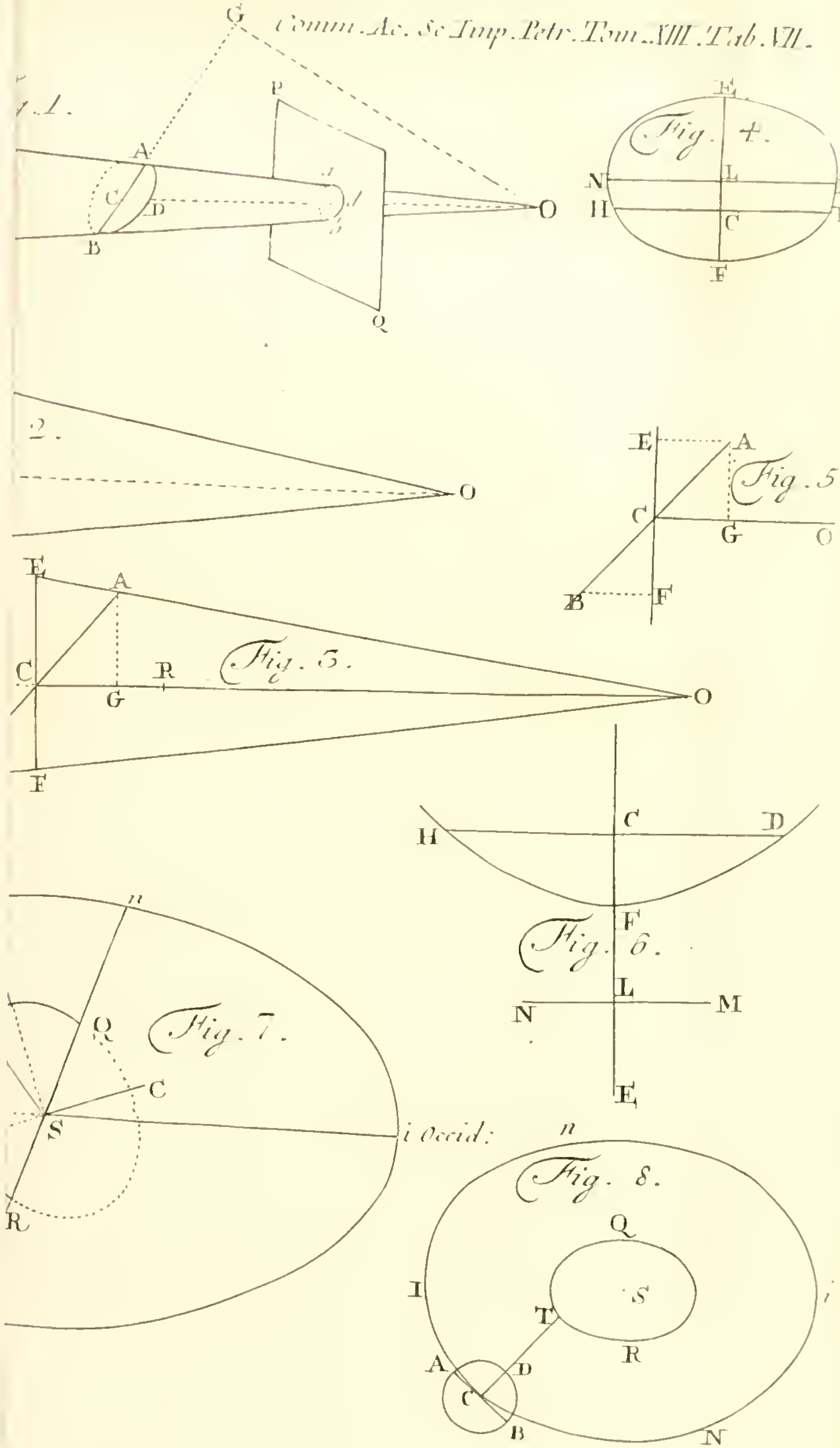


Fig. 2.


G
P
A
C
D
B
O
Q
Fig. 4.
E
N
L
M
H
C
D
F
2.
O
E
A
Fig. 5.
C
G
O
B
F
E
A
C
R
Fig. 3.
G
O
F
C
D
H
F
Fig. 6.
L
N
M
E
n
Q
Fig. 7.
C
S
i Occid:
R
n
Fig. 8.
Q
I
S
i
T
R
A
D
C
B
N

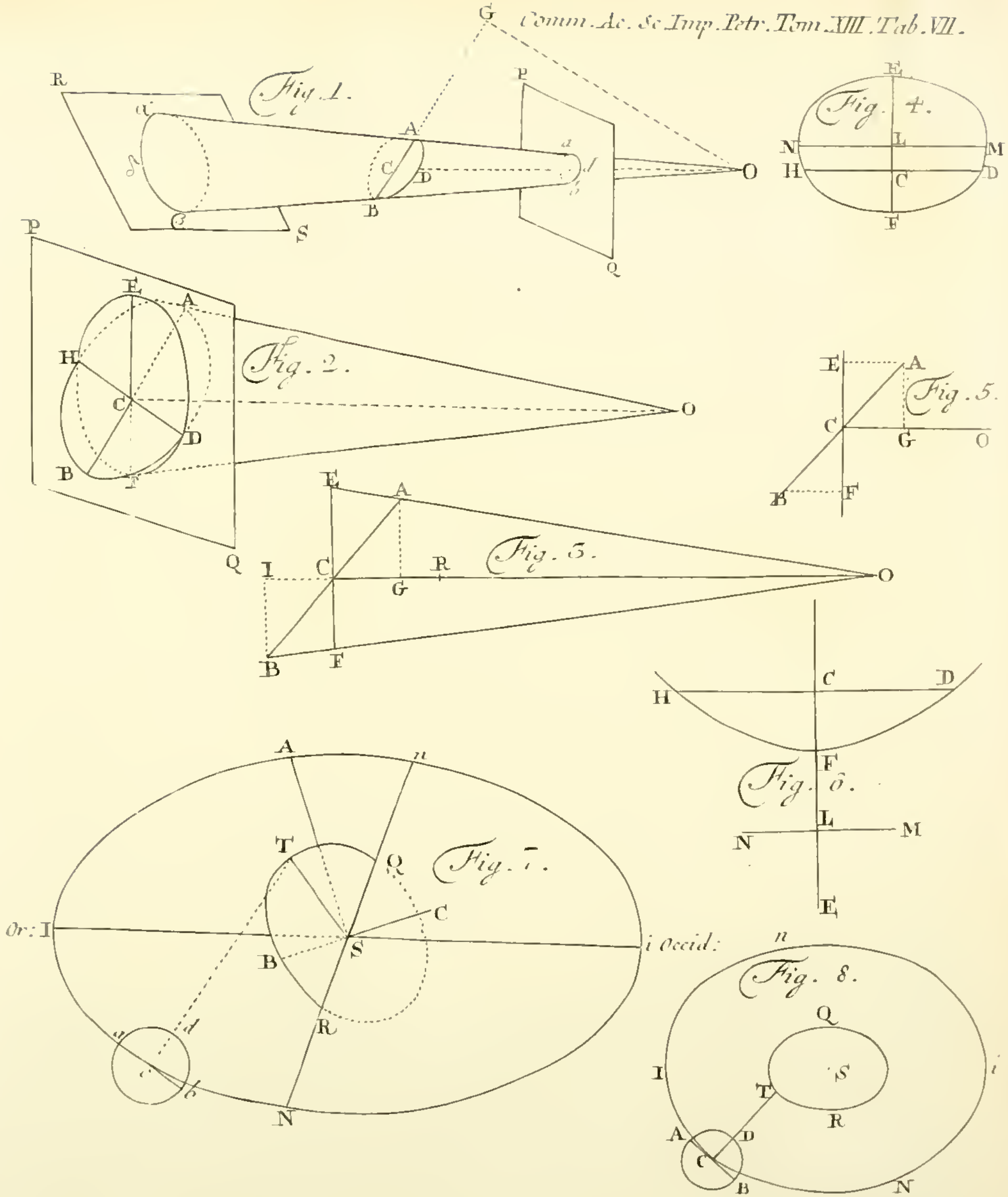

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Or: I
i Occid:

Fig. 9.

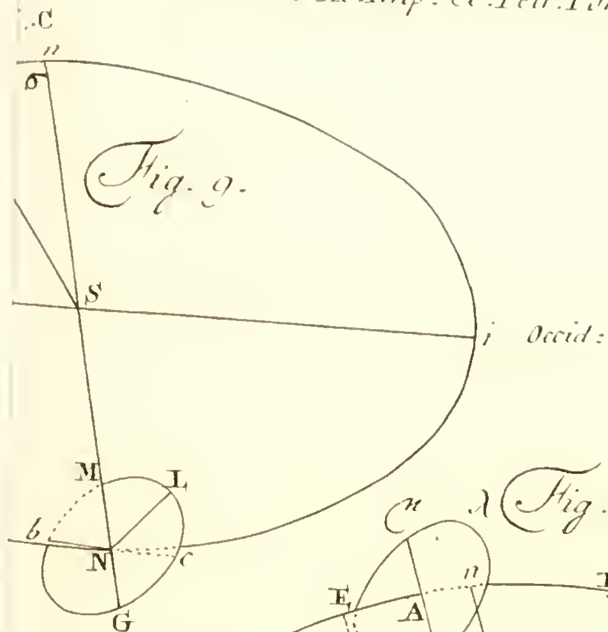
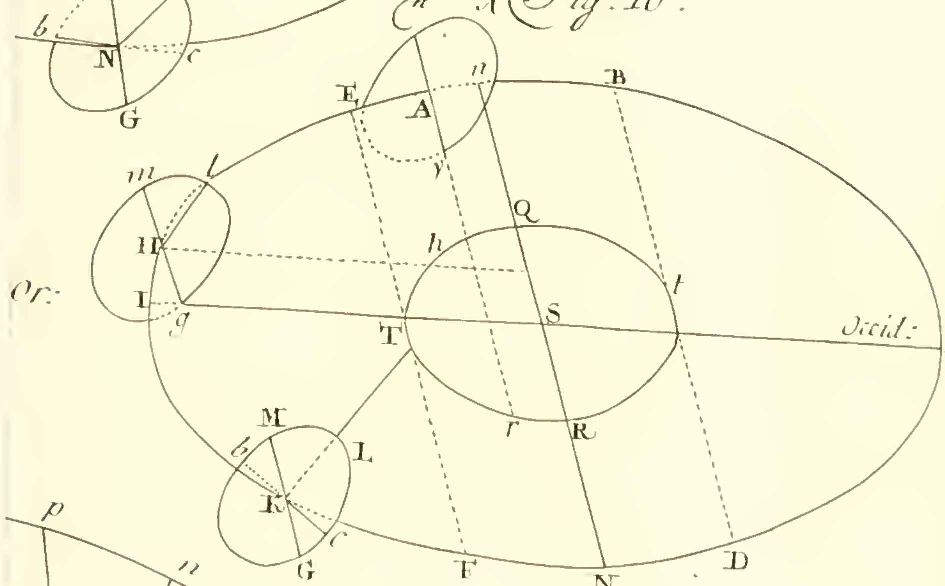
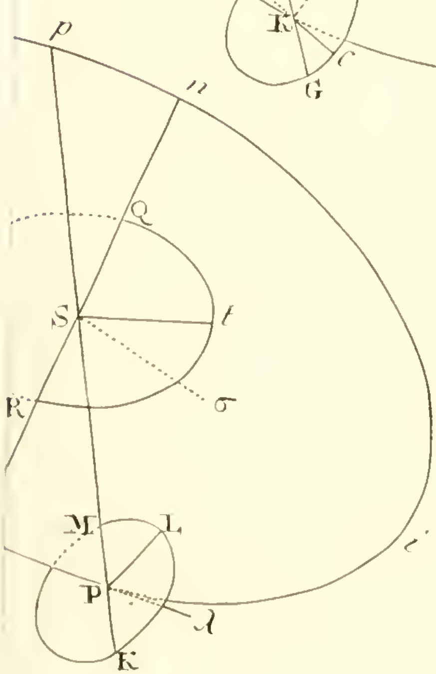
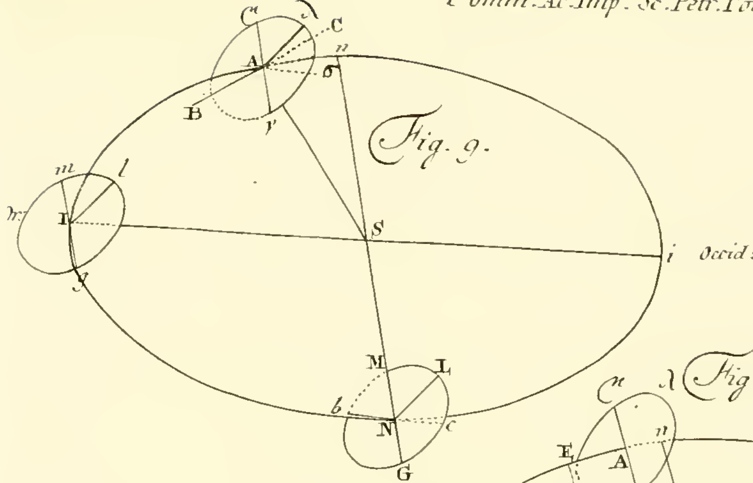
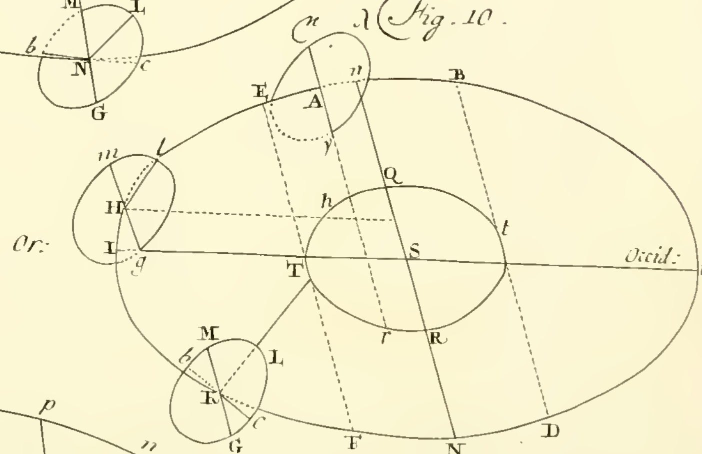

C
n
σ
S
i
Occid:
M
L
b
N
c
G

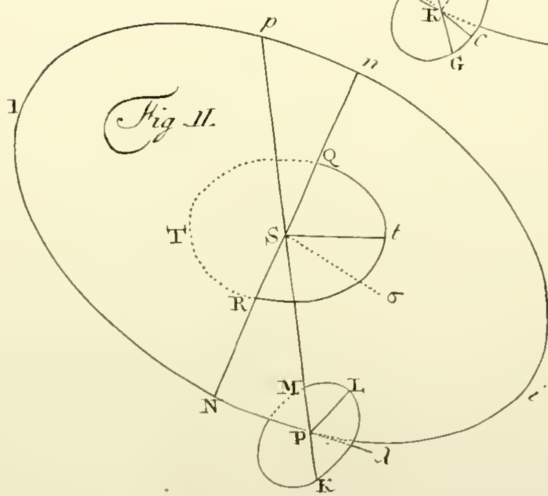
Fig. 10.


n
λ
E
A
n
B
m
l
γ
Q
H
h
t
Or:
I
g
T
S
Occid:
i
M
L
b
r
R
K
c
G
F
N
D


p
n
Q
S
t
R
σ
M
L
i
P
λ
K


Fig. 9.
Occid:


Fig. 10.
Or:
Occid:


Fig. 11.

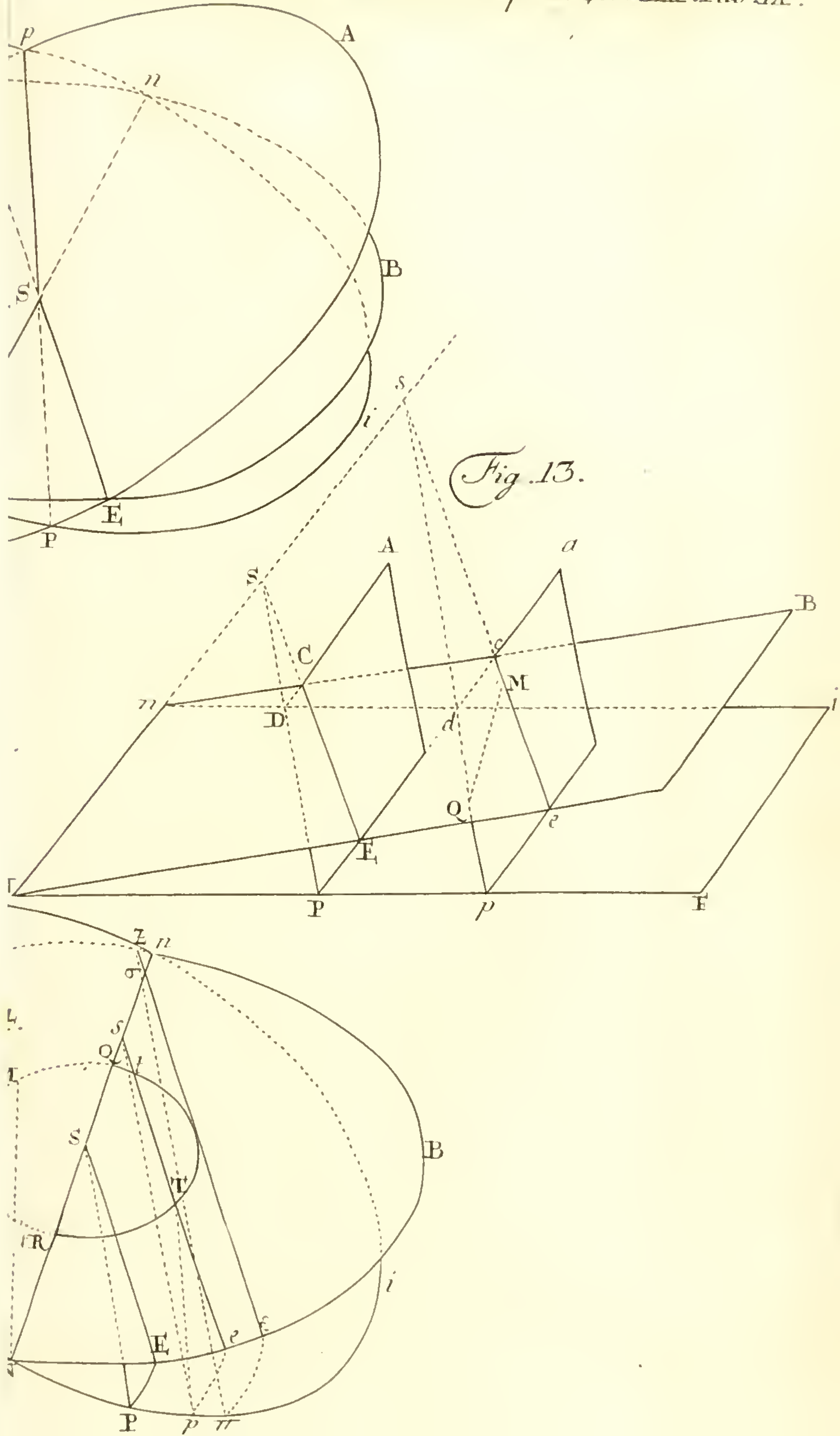
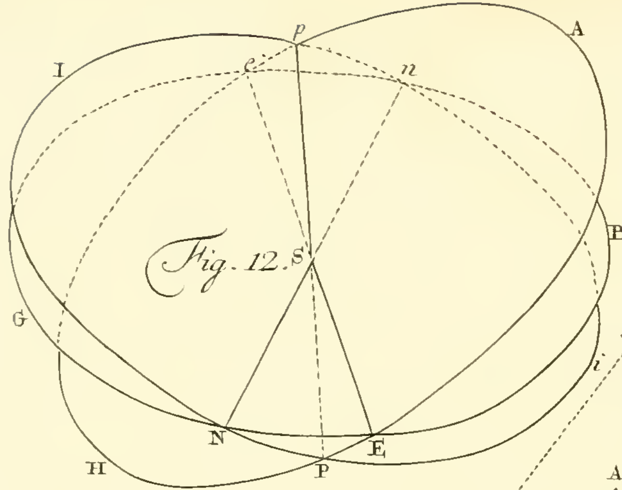
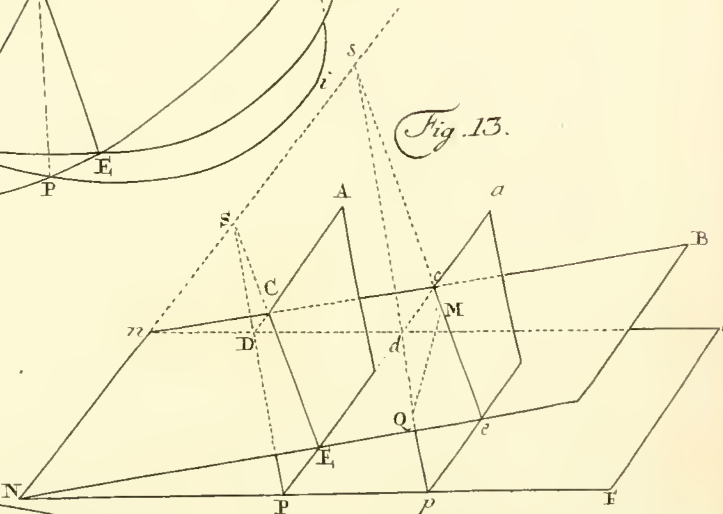


Fig. 13.


Fig. 12.
p
A
I
e
n
B
S
G
i
N
E
H
P


Fig. 13.
s
A
a
S
B
C
c
M
n
D
d
i
Q
e
E
N
P
p
F

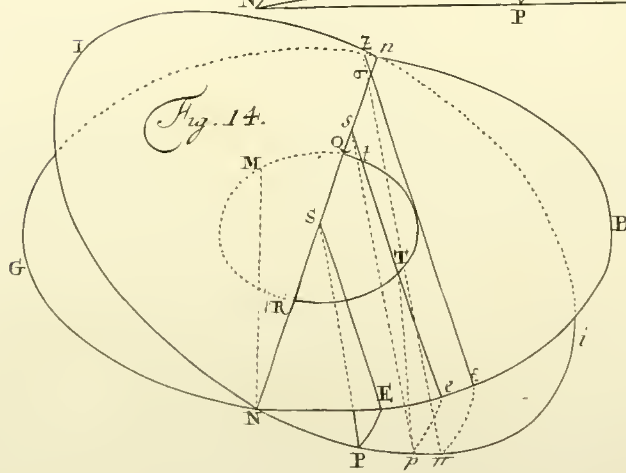

Fig. 14.
I
Z n
σ
s
Q
t
M
S
B
T
G
R
i
e
f
E
N
P
p
π







Fig. 2.

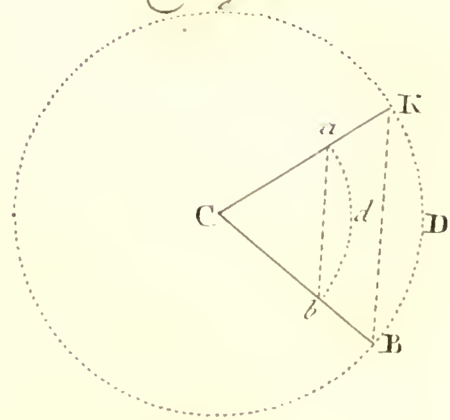


Fig. 5.

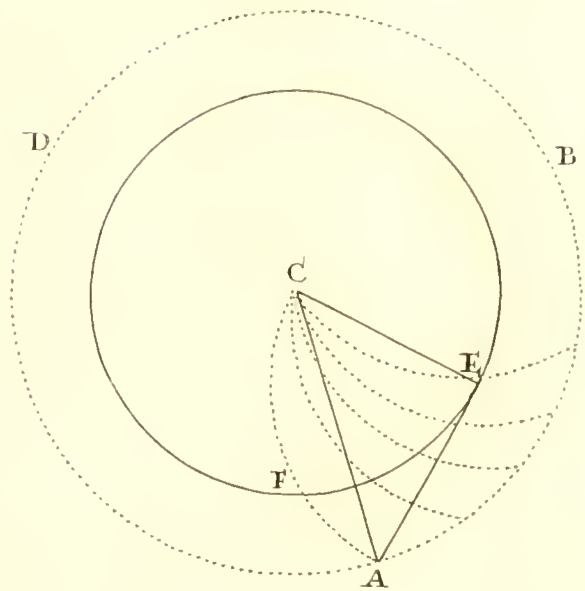


Fig. 6.

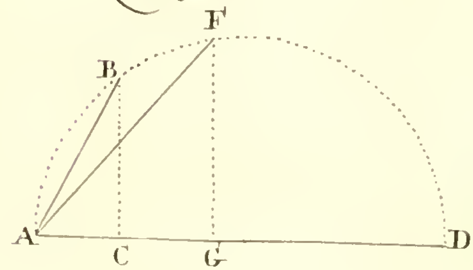


Fig. 1.

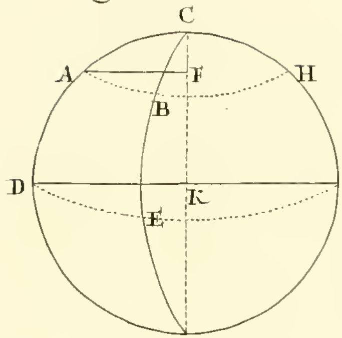


Fig. 2.

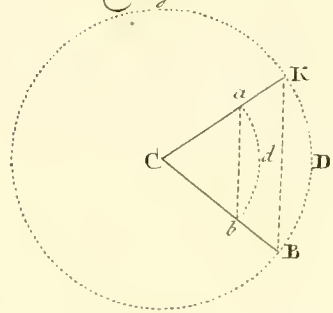


Fig. 3.

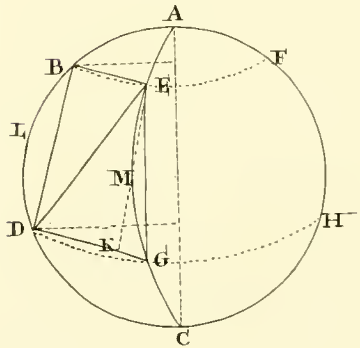


Fig. 4.

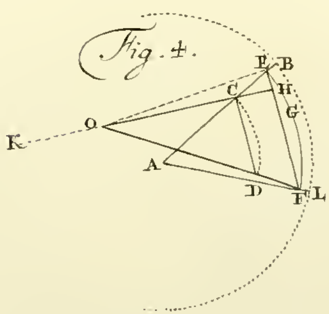


Fig. 5.

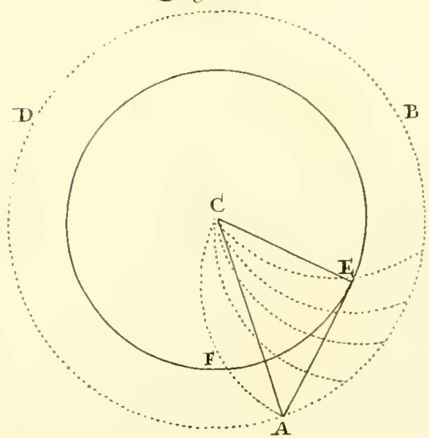


Fig. 6.

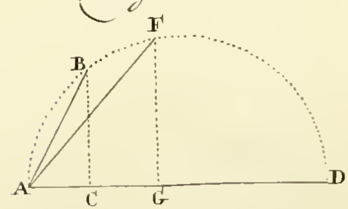


Fig. 7.

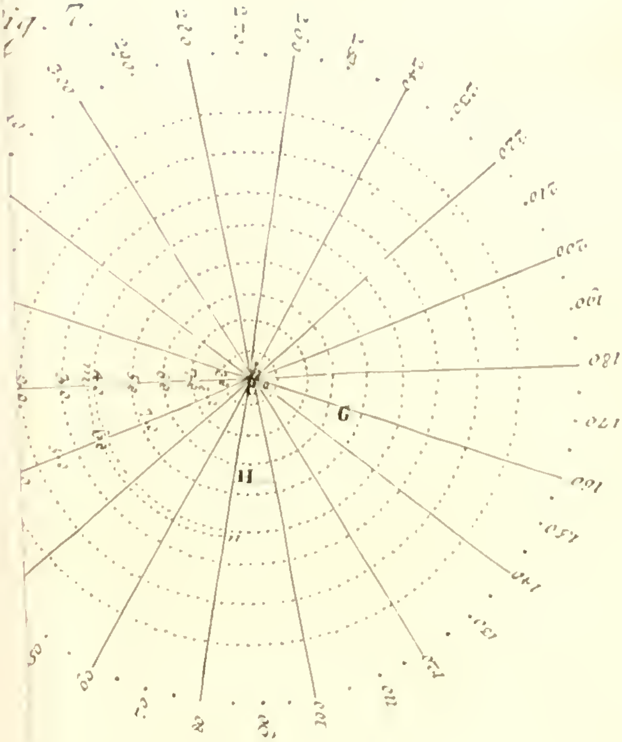


Fig. 8.

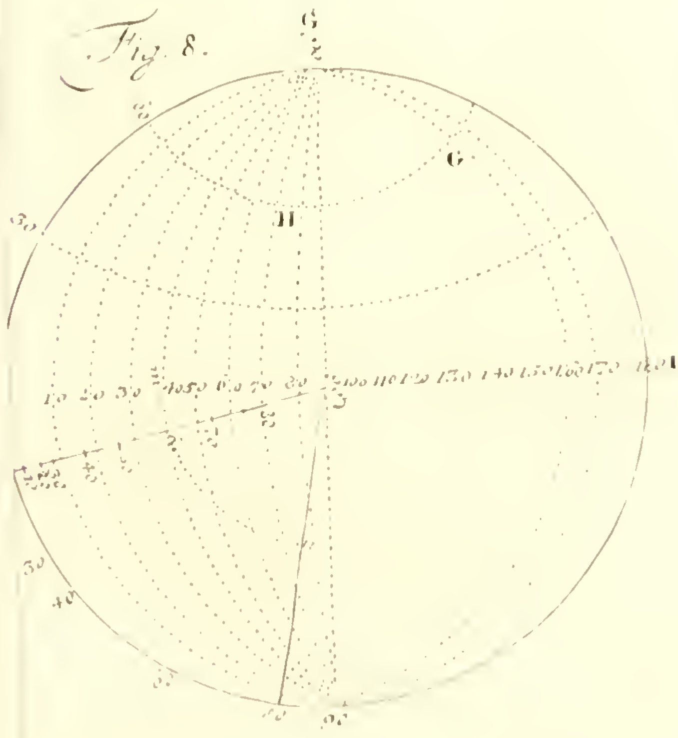


Fig. 7.

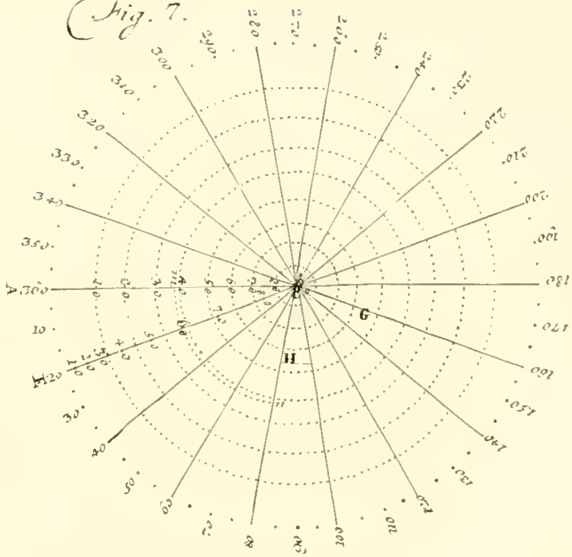


Fig. 8.

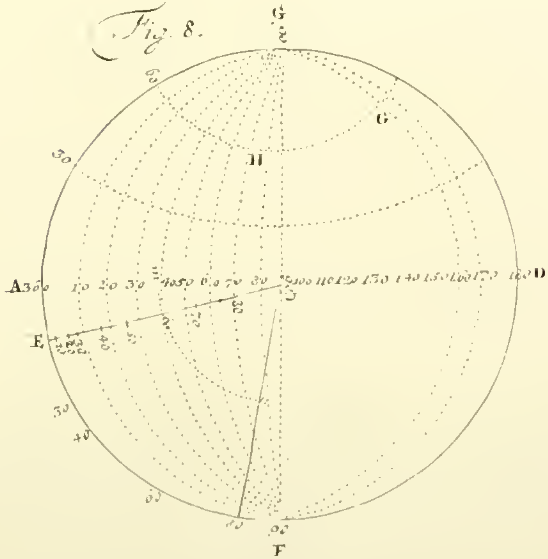


Fig. 1.



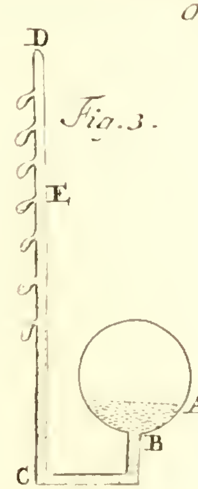


Fig. 3.

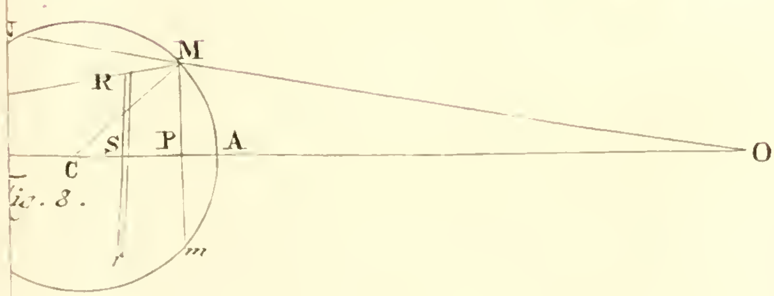
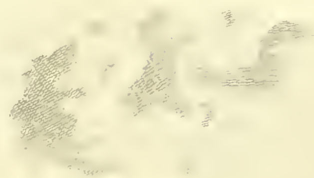


Fig. 8.



Fig. 1.


Fig. 2

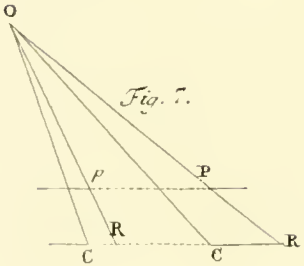


Fig. 7.

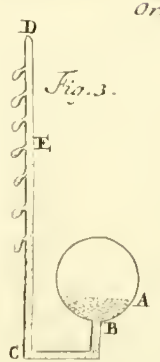


Fig. 3.

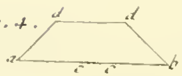


Fig. 4.

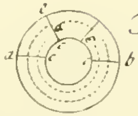


Fig. 5.

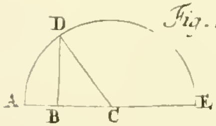


Fig. 6.

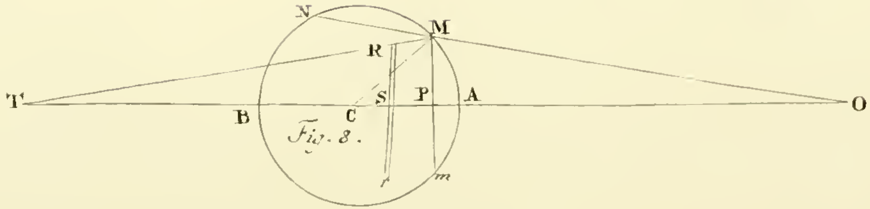
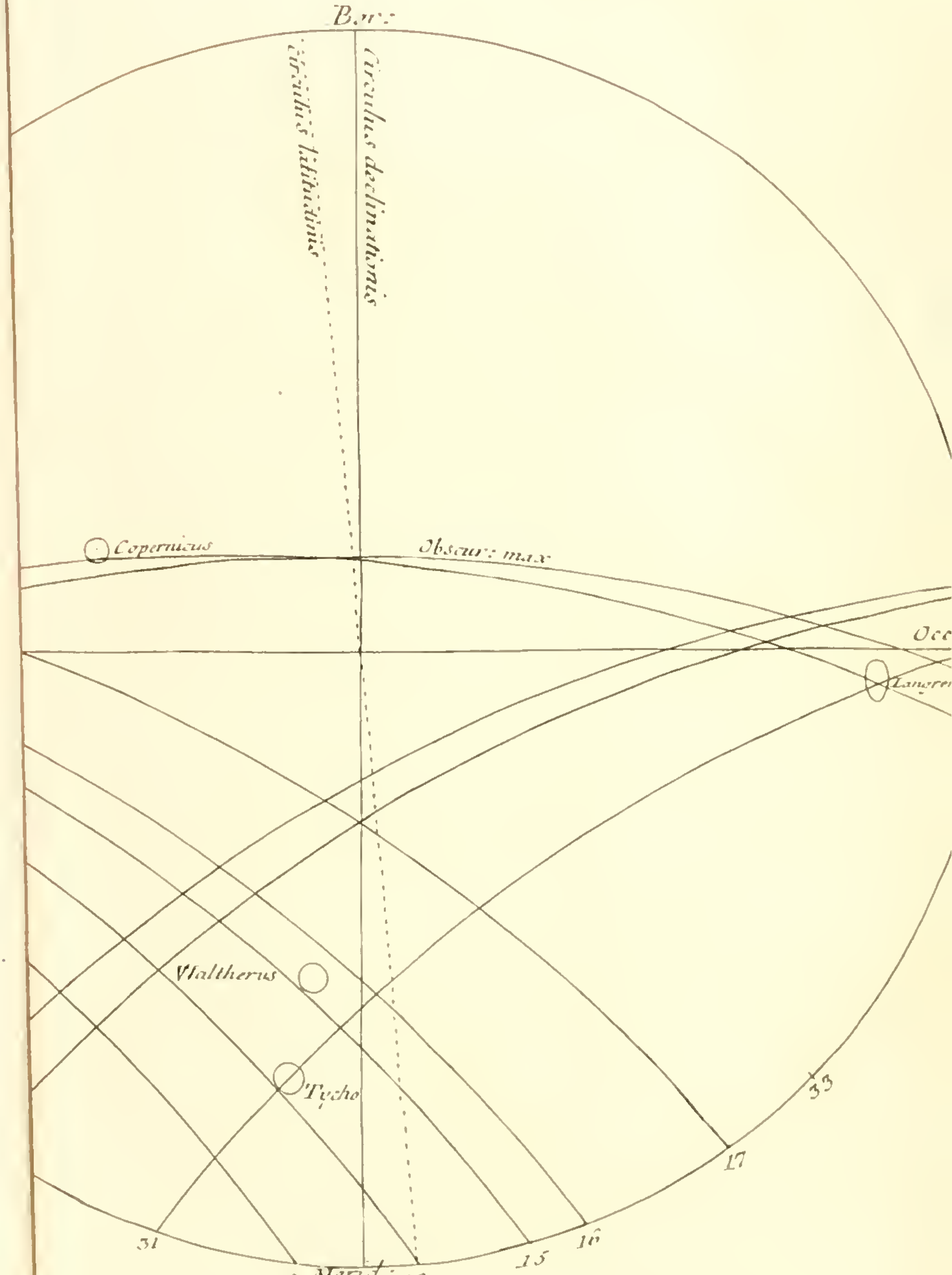


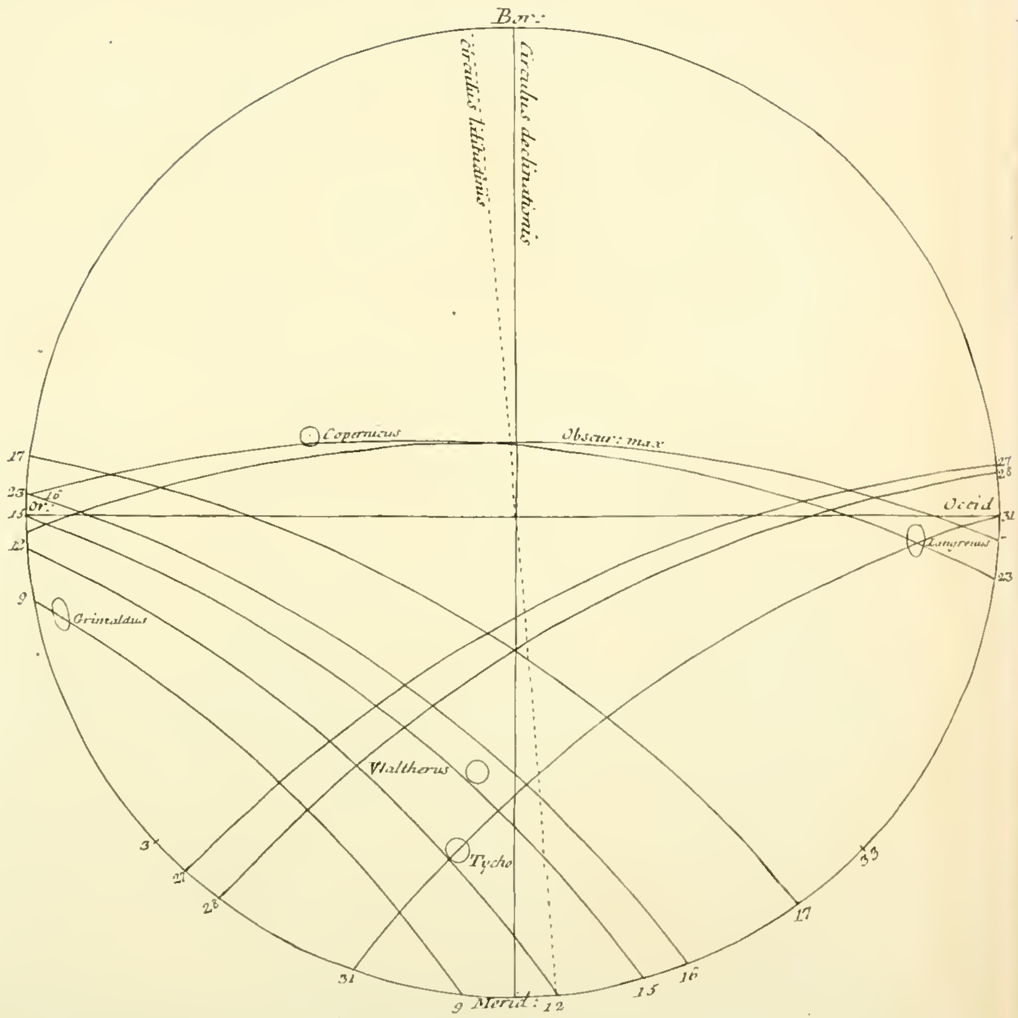
Fig. 8.


f. 1.
f. 2.



fig. 3.
f. 1.
f. 2.


Bor:
Circulus latitudinis
Circulus declinationis
Copernicus
Obscur: max
Occ
Langren
Waltherus
Tycho
33
17
16
15
31
9 Merid: 12


Bor:
Circulus declinationis
circulus latitudinis
Copernicus
Obscur: max
Or:
Occid
Langrenus
Grimaldus
Valtherus
Tycho
Merid:
17
23
16
15
12
9
27
28
31
23
3
27
28
31
9
12
15
16
17
33

AMNH LIBRARY
100127240